

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 5

1). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 > 1,$$

$$u = 1 + 3 \sin^3 \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

 u φραγμένη.2). Βρείτε την αρμονική συνάρτηση u στο μισό δίσκο $r < 1$, $0 < \theta < \pi$, και τέτοια ώστε

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$u(1, \theta) = \pi \sin \theta - \sin 2\theta + \sin^3 \theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

(Η u είναι σε πολικές συντεταγμένες.)

3). Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(1, t) + u_t(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

Προς τούτο αποδείξτε ότι κάποιο κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές αριθμησίμες στο πλήθος που συμβολίζουμε με

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots.$$

Αποδείξτε επίσης ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι οι θετικές λύσεις της εξίσωσης

$$\tan \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

και ότι ικανοποιούν την ασυμπτωτική σχέση

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{k\pi} = 1.$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις;

Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος. Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k .

4). Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(\pi, t) = -u_{tt}(\pi, t), \quad t > 0.$$

Ποιό είναι το πρόβλημα ιδιοτιμών της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών (μέθοδος Fourier) ; Προς τούτο αποδείξτε ότι κάποιο κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές αριθμήσιμες στο πλήθος που συμβολίζουμε με

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots.$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις:

Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος. Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k .

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 16 Απριλίου 2015 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 15:00 της Πέμπτης 16 Απριλίου 2015 στη διεύθυνση tertikas@uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!