

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 7

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f .

(β) Σε ποιά συνάρτηση συγκλίνει η σειρά Fourier της f ;

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{(x - \pi)^2}{4}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f .

(β) Βρείτε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

3. Έστω $f \in C^2(\mathbf{R})$ είναι 2π περιοδική συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier αυτής είναι

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Βρείτε τη σειρά Fourier της f'' (με χρήση των συντελεστών της σειράς Fourier της f).

4. Έστω $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ είναι C^∞ είναι συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0.$$

Με χρήση της ταυτότητας του Parseval αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi (f'(x))^2 dx.$$

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Τρίτη 12 Μαΐου 2015 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 15:00 της Τρίτης 12 Μαΐου 2015 στη διεύθυνση tertikas@uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!