ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου 2023

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Α, Ονοματεπώνυμο Α-Μ

Θέμα 1. Να υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\alpha) \quad \int_0^1 x^3(1+x^2)^5 \, dx,$$

$$\beta) \quad \int_0^1 \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x+2)^2} \, dx,$$

$$\gamma) \quad \int_0^\pi \sin^2 x \, e^x \, dx.$$

Θέμα 2. Εξετάστε κατά πόσο συγκλίνουν οι σειρές

$$\alpha) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, n}{n+2},$$

$$\beta) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, n}{n^2+1}.$$

$$\gamma) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3-n^2+3}.$$

Θέμα 3. (α) Έστω $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία μάλιστα ισχύουν:

$$y'(t) + 2ty(t) > 0, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 0.$$

Να αποδείξτε τότε ότι

$$y(t) > 0, \quad \forall \, t > 0.$$

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f' συνεχής στο $[0, +\infty)$, $f(0) \leq 0$, και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) > 0, \quad x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε πως η $g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση.

Θέμα 4. (α) Μόνο με χρήση ιδιοτήτων ακολουθιών να υπολογείστε τα όρια

$$a) \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+1}, \quad b) \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+1}, \quad c) \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-1}.$$

(β) Να υπολογίστε με απόδειξη το όριο

$$\lim_{n \to +\infty} (n^2 + 1)^{1/n}.$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.

Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας **διατυπώνοντας πλήρως τα θεωρήματα που κάνετε χρήση**.

<u>**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**</u>