



ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Εξέταση Σεπτεμβρίου

Θέμα 1. Προσδιορίστε με απόδειξη όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 f(t)\phi'(t) dt = 0, \quad \phi \in \mathcal{A},$$

όπου

$$\mathcal{A} = \{\phi \in \mathbf{C}^1[0, 1], \mid \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0, \quad \int_0^1 \phi(x) dx = 0.\}.$$

Θέμα 2. Βρείτε αρχικά τους πιθανούς ελαχιστοποιητές του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^1 (u'(x) - x)^2 + 2xu(x) dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, 1], \mid u(0) = 1.\}$$

Στη συνέχεια προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή και αποδείξτε ότι είναι η ελάχιστη τιμή.

Θέμα 3. Να ελαχιστοποιηθεί (χωρίς απόδειξη) το συναρτησοειδές

$$I(u, t) = \frac{1}{2} \int_0^t (u'(x))^2 dx, \quad u \in \mathcal{A},$$

με

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1[0, t] \mid u(0) = 0, \}$$

και τις δεσμεύσεις

$$J(u, t) = \int_0^t (u(x))^2 dx = \frac{\pi(\pi - 2)}{8},$$
$$t = 1 + u^2(t).$$

Να λυθούν όλα τα θέματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!