Πέμπτη 25 Οκτωβρίου 2012

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 5

1). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Με χρήση του κριτηρίου Riemann αποδείξτε ότι η συνάρτηση f^3 είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ συνεχής, η οποία επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$\int_0^1 f(t)\, dt \;=\; 0.$$

Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

3). Χωρίς τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int_1^{xy} \frac{dt}{t} \;=\; \int_1^{x} \frac{dt}{t} \;+\; \int_1^{y} \frac{dt}{t}\,, \quad x > 0,\ y > 0.$$

4). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\int_0^1 x^n\, f(x)\, dx.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n\, f(x)\, dx \;=\; 0.$$

5). (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$f(x) \;=\; 1 + \int_0^x f(t)\, dt\,, \quad x \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$g^3(x) \;=\; 1 + \int_0^x g(t)\, dt\,, \quad x \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο 0 και υπολογίστε το $g'(0)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!