Πέμπτη 8 Νοεμβρίου 2012

Α. Τερτίκας

<u>**ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ**</u>

Φυλλάδιο 7

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = x(1-x)^n \ , \ \ x \in [0,1], \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Βρείτε αρχικά το κατά σημείο όριο f της ακολουθίας f_n και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$f_n \to f, \ \ n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

2). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$g_n(x) = nx(1-x)^n \ , \ \ x \in [0,1], \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Βρείτε αρχικά το κατά σημείο όριο g της ακολουθίας g_n και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$g_n \to g, \ \ n \to +\infty,$$

δεν είναι ομοιόμορφη.

3). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = x^n \ , \ \ x \in [0,1], \ \ n \in \mathbb{N},$$

και η συνεχής συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Εάν $g(1) = 0$, αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$f_n g \to 0, \ \ n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

4). Δίνονται οι ακολουθίες των συναρτήσεων $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, και $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε οι συγκλίσεις

$$f_n \to f, \ \ n \to +\infty,$$

$$g_n \to g, \ \ n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφες. Εάν επιπρόσθετα υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_n(x)| \leq M, \ \ |g_n(x)| \leq M, \ \ x \in [0,1]$$

αποδείξτε τότε ότι η σύγκλιση

$$f_n g_n \to fg, \ \ n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη επίσης.

<u>**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**</u>