

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 8

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η σύγκλιση

$$f_n \rightarrow f, \quad n \rightarrow +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

Κατασκευάζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$g_n(x) = \int_0^1 (x+t)^{3/2} f_n(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε

(α) Η ακολουθία g_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

(β) Η ακολουθία g_n είναι ακολουθία παραγωγισίμων συναρτήσεων και μάλιστα η g'_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx,$$

το οποίο και να προσδιορίσετε.

Υπόδειξη: Ποιά είναι η απάντηση αν η f είναι παραγωγίσιμη με f' συνεχής;

3).

(α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k f(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

(β) Έστω η συνεχής συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k g(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Αποδείξτε ότι

$$g \equiv \text{σταθερά}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!