Πέμπτη 6 Δεκεμβρίου 2012

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 9

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{n}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

2). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $g_n : (-\infty,0] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$g_n(x) \ = \ \frac{xe^{nx}}{n} \ , \ \ x \in (-\infty,0].$$

Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-\infty,0]$.

3). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f_n(x) \ = \ \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^\alpha} \ , \ \ x \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0.$$

(α) Έστω $\alpha > 1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε επίσης ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R, R],\ R > 0$, ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

(β) Έστω ότι $\alpha > 2$. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>