Τρίτη 5 Νοεμβρίου 2013

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Φυλλάδιο 4)

1). α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$, η οποία επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$\int_0^1 f(s)\,ds = 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$f(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

β) Ποιές είναι οι αύξουσες συναρτήσεις $g : [0,1] \to [0,+\infty)$, που επιπρόσθετα ικανοποιούν

$$\int_0^1 g(s)\,ds = 0.$$

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη που είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$e^f + f$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

3). Δίνεται η Lipschitz συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με σταθερά $L > 0$, δηλ. η f ικανοποιεί

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|, \quad x, y \in [0,1].$$

Αποδείξτε την ανισότητα

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{L}{2n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Πως γίνεται η εκτίμηση στην περίπτωση που η f είναι Holder συνεχής με εκθέτη $\alpha \in (0,1)$, δηλ. ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha, \quad x, y \in [0,1]?$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!