

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Φυλλάδιο 6)

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, με τύπο

$$g_n(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

α) Βρείτε αρχικά το κατά σημείο όριο g της ακολουθίας g_n και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$g_n \rightarrow g, \quad n \rightarrow +\infty,$$

δεν είναι ομοιόμορφη.

β) Αποδείξτε επίσης ότι:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

Γιατί είναι ενδιαφέρουσα η άσκηση αυτή;

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx,$$

το οποίο και να προσδιορίσετε.

3). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N},$$

και η συνεχής συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Εάν $g(1) = 0$, αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$f_n g \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!