Πέμπτη 5 Δεκεμβρίου 2013

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Φυλλάδιο 7)

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, και $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ώστε η σύγκλιση

$$f_n \to f, \ \ n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

Κατασκευάζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$g_n(x) = \int_0^1 (x+t)^{3/2} f_n(t) \, dt \ , \ \ x \in [0,1], \ \ n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε

(α) Η ακολουθία g_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς $n \to +\infty$.

(β) Η ακολουθία g_n είναι ακολουθία παραγωγισίμων συναρτήσεων και μάλιστα η g_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς $n \to +\infty$.

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) \, dx \ ,$$

το οποίο και να προσδιορίστε.

Υπόδειξη: Ποιά είναι η απάντηση αν η f είναι παραγωγίσιμη με f' συνεχή;

3). (α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k f(x) \, dx = 0, \ \ k = 0, 1, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

(β) Έστω η συνεχής συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k g(x) \, dx = 0, \ \ k = 1, 2, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$g \equiv 0.$$

(γ) Έστω η συνεχής συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^{2m-1} h(x) \, dx = 0, \ \ m = 1, 2, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$h \equiv 0.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!