Πέμπτη 9 Ιανουαρίου 2014

Α. Τερτίκας

<u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ</u>

(Φυλλάδιο 8)

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, και $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ώστε η σύγκλιση

$$f_n \to f, \ \ n \to +\infty,$$

είναι ομοιόμορφη.

Εαν επιπρόσθετα οι συναρτήσεις f_n είναι ομοιόμορφα συνεχείς, αποδείξτε τότε ότι και η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής επίσης.

2). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x^2)^n \ , \ \ x \in [0,1], \ \ n \in \mathbf{N}.$$

Βρείτε αρχικά το κατά σημείο όριο f της ακολουθίας f_n και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η σύγκλιση

$$f_n \to f, \ \ n \to +\infty,$$

δεν είναι ομοιόμορφη.

Ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ f_n(x) \ dx \ = \ \int_0^1 \ f(x) \ dx \ ?$$

3). Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ (\sin x)^k f(\sin x) \ \cos x \ dx = 0, \ \ k = 0, 1, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

4). Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ \sin\frac{x}{n} \ ,$$

είναι ομοιόμορφη στα φραγμένα διαστήματα του $\mathbf{R}$.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>