Παρασκευή 17 Ιανουαρίου 2014

Α. Τερτίκας

<u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ</u>

Φυλλάδιο 9

1). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{n}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \int_0^1 \ x^n f(x)\, dx \ ,$$

το οποίο και να προσδιορίστε.

Υπόδειξη: Ποιά είναι η απάντηση αν η f είναι παραγωγίσιμη με f' συνεχή;

3). Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f_n(x) \ = \ \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^\alpha} \ , \ \ x \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0.$$

(α) Έστω $\alpha > 1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε επίσης ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R,R], \ R>0$, ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$.

(β) Έστω ότι $\alpha > 2$. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4).
(α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k f(x)\, dx = 0, \quad k = 0, 1, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$f \equiv 0.$$

(β) Έστω η συνεχής συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^k g(x)\, dx = 0, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Αποδείξτε ότι

$$g \equiv \text{σταθερά}.$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>