ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 15 Δεκεμβρίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
(Τμήμα Α)

Φυλλάδιο 11

1)$^{\otimes}$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$a)\ \int_{-2}^{3} \frac{3\ dx}{(x+3)^4},\quad b)\ \int_1^2 \sqrt{1+x}\, dx.$$

2). Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$a)\ \int_0^1 x(1-x)^{2022}\, dx,\quad b)\ \int_0^1 x\sqrt{1+x}\, dx,\quad c)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx.$$

3)$^{\otimes}$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$a)\ \int_0^1 \frac{2e^x+1}{e^x+1}\, dx,\quad b)\ \int_1^2 x\ln x\, dx,\quad c)\ \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2\, dx.$$

4).$^{\otimes}$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$a)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx,\quad b)\ \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx,\quad c)\ \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\, dx.$$

5)$^{\otimes}$. Δινονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ που επιπρόσθετα ικανοποιούν:

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^x - x^2 + x,\quad \forall x \in \mathbf{R},$$

$$\int_x^{x^2} g(t)\,dt = x(x-1)e^x - x^2 + x, \;\; \forall x \in \mathbf{R}.$$

Να υπολογίστε τις

$$f(x), \;\; x \in \mathbf{R}, \quad g(0).$$

6)$^{\otimes}$. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τέτοιες ώστε η f είναι συνεχής και η g είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$Q(x) = \int_{g(x)}^{g^2(x)} f(t)\,dt, \;\; x \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε πως η Q είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την

$$Q'(x), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

7). Έστω $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση που επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$f(x) = 0, \;\; \forall x \in [0,1].$$

<u>Υπόδειξη:</u> Μελετήστε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \;\; x \in [0,1].$$

<u>Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με $\otimes$</u>

<u>Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)</u>

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!</u>