



Πέμπτη 20 Οκτωβρίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

(Τμήμα Α)

Φυλλάδιο 4

1)[⊗]. Αποδείξτε ότι

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}.$$

2)[⊗]. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

3)[⊗]. Δίνονται οι ακολουθίες

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad n \in \mathbf{N},$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε ότι

$$a_n < b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

και στη συνέχεια πως είναι συγκλίνουσες και μάλιστα συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

4). Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ που είναι τέτοια ώστε οι υπακολουθίες

$$(a_{2n})_{n \in \mathbf{N}}, \quad (a_{2n-1})_{n \in \mathbf{N}}, \quad (a_{3n})_{n \in \mathbf{N}}$$

είναι συγκλίνουσες. Αποδείξτε πως και η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

5)[⊗]. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ που είναι τέτοια ώστε οι υπακολουθίες

$$(a_{3n})_{n \in \mathbf{N}}, \quad (a_{3n-1})_{n \in \mathbf{N}}, \quad (a_{3n-2})_{n \in \mathbf{N}}$$

είναι συγγκλίνουσες με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{3n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{3n-2} = a.$$

Αποδείξτε πως και η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ είναι συγγκλίνουσα.

6)[⊗]. Έστω $a \in \mathbf{R}$ με $|a| < 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na^n = 0.$$

7). Δίνεται ακολουθία $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ που ικανοποιεί

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία a_n είναι συγγκλίνουσα και βρείτε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!