



Πέμπτη 17 Νοεμβρίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

(Τμήμα Α)

Φυλλάδιο 7

1)[⊗]. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Εάν επιπρόσθετα ισχύει

$$f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (0, 1),$$

αποδείξτε πως η f είναι 1-1.

2)[⊗]. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$. Εάν επιπρόσθετα ισχύει

$$f(-1) = 3, \quad f'(x) \geq 2, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

αποδείξτε πως $f(1) \geq 7$.

3)[⊗]. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}.$$

4)[⊗]. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0.$$

5). Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq f(\beta), \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Αποδείξτε πως $f'(\beta) \geq 0$.

6)[⊗]. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και τέτοια ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

7). Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο (α, β) και τέτοια ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αποδείξτε ότι $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \lambda f(\xi).$$

Οι ασκήσεις για παράδοση σημειώνονται με ⊗

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνεται προσωπικά την ώρα των Ασκήσεων (Εργαστήριο)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!