



Τετάρτη 30 Νοεμβρίου 2022

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι**

Εξέταση Προόδου

**Θέμα 1.** α) Με χρήση του ορισμού υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x}.$$

β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

**Θέμα 2.** Αποδείξτε την ανισότητα

$$2xy \leq x \ln x + e^{2y-1}, \quad \forall x > 0, y > 0.$$

**Θέμα 3.** α) Να υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n.$$

β) Δίνεται η ακολουθία  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , τέτοια ώστε να ικανοποιεί

$$0 < a_{n+1} \leq \frac{a_n^4}{8}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_1 = 2.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριο αυτής.

**Θέμα 4.** Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(2, +\infty)$  και τέτοια ώστε

$$x \leq g'(x) \leq x^2, \quad x > 2,$$
$$g(2) = 2.$$

Αποδείξτε ότι

$$\frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{x^3 - 2}{3}, \quad x \geq 2.$$

**Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.**

Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας διατυπώνοντας πλήρως τα θεωρήματα που κάνετε χρήση.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**