ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ακαδ. Έτος 2011 – 2012

Της φοιτήτριας

ΦΑΣΟΥΛΑΚΗ ΕΥΓΕΝΙΑΣ

Διδάσκων

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΤΕΡΤΙΚΑΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

14.2.2012

20%	ασκήσεις
30%	πρόοδος
50%	τελικό

library.nu (Walter Strauss
An Introduction to Partial Diferetral Equations).

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

- μερική παράγωγος -> Έχουμε να κάνουμε με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Παράγωγος -> μια μεταβλητή

Αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$, μας δίνεται μια εξίσωση με σκοπό να βρούμε την άγνωστη συνάρτηση.

Αρμονικές Συναρτήσεις:

$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad (x,y) \in \Omega$

$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) := u_x(x,y)$: Παραγώγιση της συνάρτησης u ως προς x.

$$u_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h}$$

- $f = f(t)$ $\quad f'(t)$

$\frac{d}{dt} f(t)$ ή $\dot{f}(t)$

Φυσική

- Φυσικό πρόβλημα

- Πειράματα

Εκτέλεση ενός πειράματος κάτω από τις ίδιες συνθήκες, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Μαθηματικά

- Μοντέλο

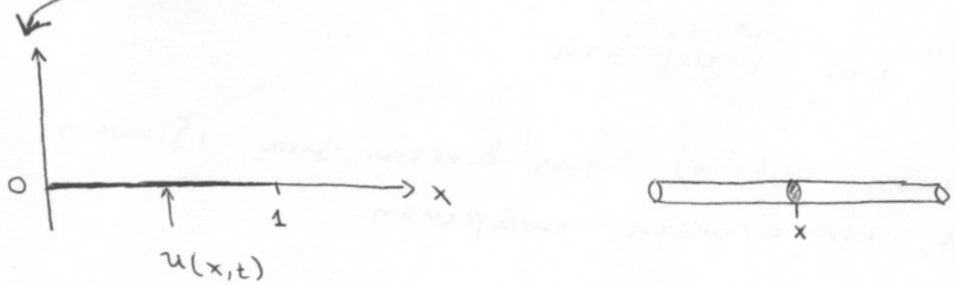
$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ (εξίσωση θερμότητας)

x: χωρική μεταβλητή

t: χρονική μεταβλητή

- Λύνουμε Εξισώσεις

$\boxed{\text{Ντετερμινιστική προσέγγιση}}$



$u(x,t) :=$ θερμοκρασία της ράβδου στη θέση x τη χρονική στιγμή t.

Ένα μοντέλο θα λέμε ότι είναι πετυχημένο όταν έχουμε:

Καλή Τοποθέτηση Προβλήματος:

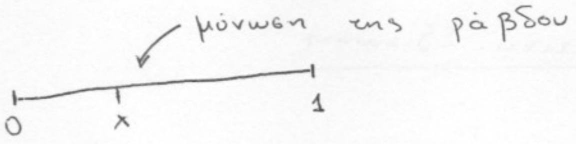
$$\left.\begin{array}{l}\text{i). Ύπαρξη λύσης (στο Μαθηματικό Πρόβλημα)}\\ \text{ii). Μοναδικότητα της λύσης}\\ \text{iii). Συνεχής Εξάρτηση των λύσεων από τις παραμέτρους.}\end{array}\right\}\ \text{Συνθήκες Hadamard.}$$

Μελέτη του Μαθηματικού Μοντέλου.

$u_t = u_{xx}$ Εξίσωση θερμότητας

$u_{tt} = u_{xx}$ Εξίσωση Κύματος (παλλόμενης χορδής).

$iu_t = u_{xx}$ Εξίσωση Schrödinger.



οπότε οποιαδήποτε μεταβολή μόνο από τα άκρα μπορούμε να έχουμε.

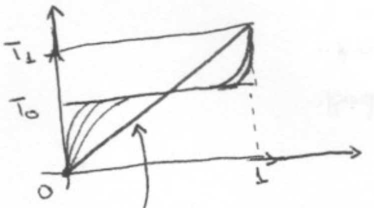
Αριστερό

Δεξιό

$u(x,t)$

Αρ. θερμοκρασία της ράβδου. (αρχικές συνθήκες του προβλήματος).

Συνοριακή συνθήκη του προβλήματος



$u(x,0) = T_0, \quad 0 \le x \le 1$

$T_1 > T_0 > 0.$

$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0$

$u(1,t) = T_1, \quad t \geq 0$

$u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$

$u_\infty(x) = T_1 x.$

<u>Μαθ. Μοντέλο</u> → <u>Παραβολική Εξίσωση</u>

$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) \quad 0 \le x < 1,\ t > 0,\ k > 0$

<u>Αρχικές Συνθήκες</u> (Α.Σ) $\quad u(x,0) = u_0(x)$

<u>Συνοριακές Συνθήκες</u> (Σ.Σ) $\begin{cases} u(0,t) = h_1(t) \\ u(1,t) = h_2(t) \end{cases} \quad t \geq 0$ (Περιγράφουμε τη λύση).

Dirichlet Συνοριακές Συνθήκες

$\begin{cases} u_x(0,t) = h_1(t) \\ u_x(1,t) = h_2(t) \end{cases}$

Neumann Συνοριακές Συνθήκες

(Περιγράφουμε την κλίση)

$\begin{cases} u_x(1,t) + k\cdot u(1,t) = h_2(t) \\ u_x(0,t) - k\, u(0,t) = h_1(t) \end{cases}$

Robin Συνοριακές Συνθήκη

(γρ. συνδυασμός).

Ασυμπτωτικό Πρόβλημα

$$0 = k \cdot u_{xx}(x) \quad , \; 0<x<1 \qquad \to \text{ελλειπτική Εξίσωση}$$

$$\Sigma.\Sigma: \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{array}$$

Στάσιμο Πρόβλημα του χρονοεξαρτώμενου.

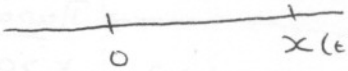
Κλασική Λύση

$$u(x,t): \; \mathbb{D}^{2,1}\big(\overset{x}{(0,1)} \times \overset{t}{(0,+\infty)}\big) \cap \mathbb{C}\big((0,1)\times[0,+\infty)\big) \cap \mathbb{C}\big([0,1]\times(0,+\infty)\big)$$

ως προς την 1^{η} μεταβλητή 2 φορές παραγ.
ως προς την 2^{η} μεταβλητή 1 φορά παραγ.

$\to x''(t)=0 \;,\; t>0 \qquad , \; x \in D^2(0,+\infty) \cap C^1([0,+\infty))$

$x(0)=x_0, \quad x'(0)=x_1$



$x'(t)=c_1 \iff (x(t)-c_1t)'=0 \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2 \;,\; t>0$

$x(0)=c_2 \Rightarrow x \in [0,+\infty)$

$x'(0)=c_1 \Rightarrow x' \in C[0,+\infty) \iff x \in C^1[0,+\infty)$.

Αναπλήρωση 22/2
1-3
PA 101

21.2.2012

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης

Εξίσωση που περιγράφει την Δ.Ε

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{δοθείσα}\\ \text{συνάρτηση}}}{F}\Big(x,\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{άγνωστη}\\ \text{συνάρτηση}}}{u(x)},\ \underbrace{u_x(x),\ u_y(x),\ u_z(x)}_{\nabla u(x)}\Big) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla u(x) = \big(u_x(x),\ u_y(x),\ u_z(x)\big),\ x\in\mathbb{R}^3\\ &\text{ή}\\ &Du(x)\end{aligned}}$$

2ης τάξης $\quad F\big(x,\ u(x),\ \nabla u(x),\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{πίνακας}\\ \text{Hess}}}{D^2 u(x)}\big)$

$u_{xx}(x),\ u_{yy}(x),\ u_{zz}(x)$

$u_{xy}(x),\ u_{xz}(x),\ u_{yz}(x)$

$u_{yx}(x),\ u_{zx}(x),\ u_{zy}(x).$

$x\in\mathbb{R}^n$
$\quad ''$
$(x_1,\dots,x_n).$

$$\boxed{D^2u = \big(u_{x_i x_j}(x)\big)_{i,j=1}^{n}}$$
$$\| $$
$$\begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} & u_{x_1x_3}\\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} & u_{x_2x_3}\\ u_{x_3x_1} & u_{x_3x_2} & u_{x_3x_3}\end{pmatrix}$$

$$u_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$
$$\|$$
$$u_{x_j x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

αν η u είναι 2 φορές παραγ. με συνεχή δεύτερη παράγωγο. $\big(u\in C^2(\Omega)\big)$.

$$\nabla^2 u = \Delta u = u_{xx}(X) + u_{yy}(X) + u_{zz}(X)$$

$$X = (x,y,z).$$

∇^2 ↓ Λαπλασιανή (Laplace)

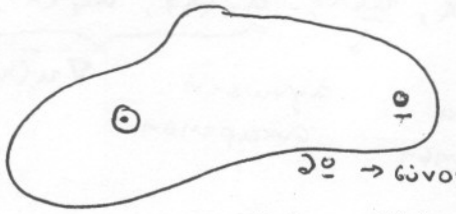
Η πιο απλή μερική διαφορική εξίσωση: $u_x(x,y)=0$.

$X=(x,y)$

Ζητείται να βρεθεί η $u: \Omega \to \mathbb{R}$, όπου Ω χωρίο $\subseteq \mathbb{R}^2$.

(ανοικτό)
συνεκτικό

$\forall x_0 \in \Omega,\ \exists \delta>0 : B(x_0,\delta) \subset \Omega$



$\partial\Omega \to$ σύνορο του Ω.

$a \in \partial\Omega,\ \exists (x_n) \subseteq \Omega$

$x_n \to a,\ n\to\infty$.

<u>Πρόταση</u>

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, Ω ανοικτό, συνεκτικό και $u: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή και

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=0, \quad \forall (x,y)\in\Omega \quad \text{τότε:}$$

$$\exists\ u(x,y)=u(x_0,y), \quad \forall (x,y)\in\Omega$$

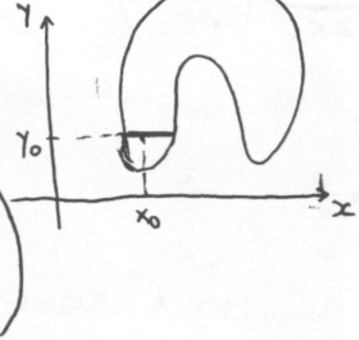
<u>Απόδειξη</u>

$u(x,y_0)-u(x_0,y_0)=$

(διάστημα x, x_0

$x<x_0$

$[x,x_0]\times\{y_0\}\subset\Omega$)



$\exists\ \xi\in[x,x_0]$

$=(x-x_0)\cancel{\frac{\partial}{\partial x}u(\xi,y_0)}^{\,0}=0$

$\Rightarrow u(x,y_0)=u(x_0,y_0)$.

1 μεταβλητή

$f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$

$f'(t)=0,\ t\in(a,\beta)$

$\Rightarrow f(t)=f(t_0),\ \forall t\in(a,\beta)$, $t_0\in(a,\beta)$

<u>Θ.Μ.Τ</u>

$\exists\ \xi\in(t,t_0)$:

$f(t)-f(t_0)=(t-t_0)f'($

$=0$

Πρόταση

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, συνεκτικό, και $u_x(x,y)=0$ $\quad (x,y)\in\Omega$

(*) Αν $(x_0,y)\in\Omega$ και x τ.ω $[x,x_0]\times\{y\}\subset\Omega$, αν $x<x_0$ ή

$[x_0,x]\times\{y\}\subset\Omega$, αν $x_0<x$.

τότε $u(x,y)=u(x_0,y)$.

Η u είναι παραγωγίσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή.

Πρόταση

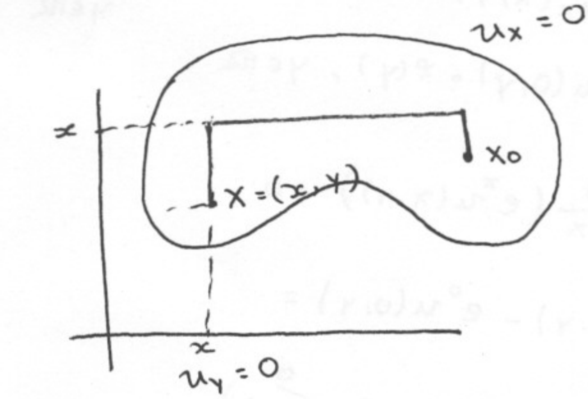
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, συνεκτικό και $u:\Omega\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

και μάλιστα $\nabla u(x,y)=0$.

τότε:

Αν $(x_0,y_0)\in\Omega$, θα ισχύει $u(x,y)=u(x_0,y_0)$, $\forall (x,y)\in\Omega$.

Απόδειξη



Χρησιμοποιώ το γεγονός ότι αν Ω ανοιχτό, συνεκτικό τότε για κάθε 2 σημεία του υπάρχει πολυγωνική γραμμή με πλευρές παράλληλες των αξόνων, η οποία συνδέει τα δύο σημεία.

Έστω Ω $\quad (x,y)\in\Omega$, $(x_0,y)\in\Omega \Rightarrow [x,x_0]\times\{y\}\in\Omega$.

$$u_x(x,y)=0$$
$$\Downarrow$$
$$u(x,y)=f(y)$$

$\Omega = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = u(0,y) = f(y) \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

<u>Πρόβλημα</u>

Έστω $u : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Βρείτε την u για την οποία

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \ y > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

όπου f $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ είναι δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

$u_x + u_y = 0$

$\eta = (1,1)$

κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση η.

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x + t\eta) - u(x)}{t} = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)$$

$$= \nabla u(x) \cdot \eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0$$

$$\begin{cases} e^x u_x(x,y) + e^x u(x,y) = 0, & x > 0, \ y \in \mathbb{R} \\ u(0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x u(x,y)\right) = 0$$

$$e^x u(x,y) - e^0 u(0,y) =$$

$$\overset{\exists \xi}{=} (x - 0) \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(e^\xi u(\xi,y)\right)}^{\,0} = 0$$

$$\Rightarrow e^x u(x,y) = u(0,y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^{-x} f(y), \quad x \in [0,+\infty), \ y \in \mathbb{R}.$$

$$u_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h}$$

$$= \nabla u \, e_1$$

$$= \frac{\partial u}{\partial e_1}.$$

23.2.2012

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0$$

Κατά κατεύθυνση παράγωγος

$u(x_0,t_0)$, $v=(a,\beta)$, $|v|=1$

$$\lim_{s\to 0}\frac{u(x_0+s\cdot a,\ t_0+s\beta)-u(x_0,t_0)}{s} = \frac{\partial u}{\partial v}(x_0,t_0) = \nabla u(x_0,t_0)\cdot v$$

$x,t\in\mathbb{R}$

$u_t(x,t)=0 \Rightarrow u(x,t)=u(x,0)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=0$ Θ.Μ.Τ

$u(x,t)-u(x,0) \overset{\exists \xi\in(t,0)}{=} (t-0)\cdot \cancel{u_t(x,\xi)}^{0} = 0$

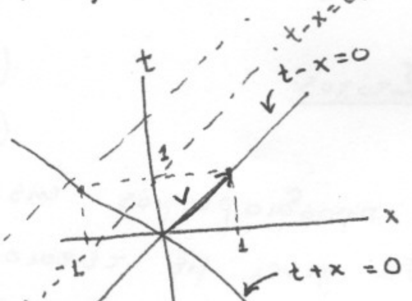
$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0 \Rightarrow u(x,t)=u(0,t)$

$$v=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = \nabla u(x,t)\cdot v = (u_x(x,t),\ u_t(x,t))\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\left(u_x(x,t)+u_t(x,t)\right) = 0.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(t-x).$$



Εξαρτάται απ'όλες αυτές τις παράλληλες ευθείες. $(t-x)$.

2ος τρόπος

Αλλαγή συστήματος συν/νων. Εισάγουμε $\xi = t-x$

$\eta = t+x$.

θέτουμε $u(x,t) = U(\xi,\eta)$.

Κανόνας της αλυσίδας:

$$u_t(x,t) = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta)$$

αντίστοιχα, $$u_x(x,t) = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= -U_\xi(\xi,\eta) + U_\eta(\xi,\eta)$$

οπότε, $\quad u_t + u_x = 0 \iff U_\xi + U_\eta - U_\xi + U_\eta = 0$

$$\iff 2U_\eta(\xi,\eta) = 0$$

$$\iff \frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi,\eta) = 0 \quad \leftarrow \text{ δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή } \eta.$$

$$\Rightarrow U(\xi,\eta) = U(\xi,0).$$

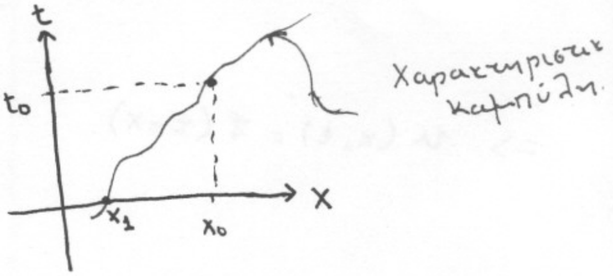
Επομένως, $\quad u(x,t) = U(\xi,\eta) = U(\xi,0) = f(\xi) = f(t-x).$

3^{os} τρόπος   Μέθοδος των Χαρακτηριστικών:

$$\left.\begin{aligned} &u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0 \quad , x\in\mathbb{R} \ , \ t>0 \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned}\right\} \text{ Πρόβλημα αρχικών τιμών.}$$

Στόχος: $\quad (x(0), t(0)) = (x_1, 0)$

$\qquad\qquad (x(s), t(s)) = (x_0, t_0)$



Ο προσδιορισμός της καμπύλης θα γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε αν παραγωγίσουμε τη λύση κατά μήκος της καμπύλης, τότε ο υπολογισμός θα είναι τέτοιος ώστε να μιμείται τη Δ.Ε.

Καμπύλη στο Επίπεδο.

$(x(s), t(s))$, $s\in\mathbb{R}$ παράμετρος καμπύλης.

$(X(t,s), Y(t,s))$

$t, s \in \mathbb{R}$ παράμετροι.

Επιφάνεια.

$$\frac{d}{ds}\big(u(x(s), t(s))\big) = u_x(x(s),t(s))\cdot x'(s) + u_t(x(s),t(s))\cdot t'(s)$$

$$\left.\begin{aligned} &x'(s) = 1 \ , \ s\in\mathbb{R} \quad , \quad x(0) = x_1 \\ &t'(s) = 1 \ , \ s\in\mathbb{R} \quad , \quad t(0) = 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} &x(s) = s + x(0) \\ &t(s) = s + t(0) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} &x(s) = s + x_1 \\ &t(s) = s \end{aligned}$$

τότε όμως $\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x \cdot 1 + u_t \cdot 1 = 0 , \quad s>0$

$$u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0))$$

$$u(s+x_1, s) = u(x_1, 0) = f(x_1).$$

$$u(s+x_1, s) = f(x_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(s)=x_0 \\ t(s)=t_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} s+x_1=x_0 \\ s=t_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} t_0+x_1=x_0 \\ s=t_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=x_0-t_0 \\ s=t_0 \end{array}\right\}$$

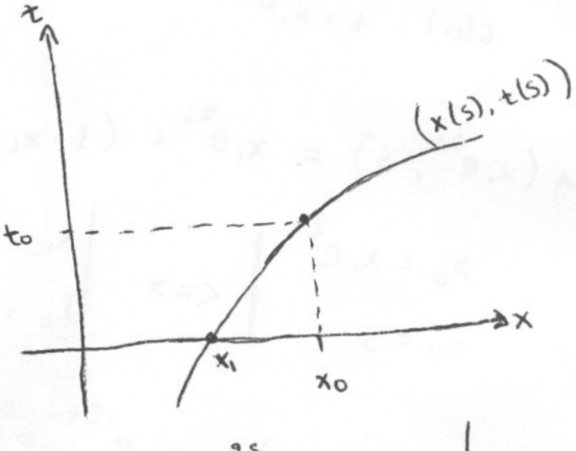
$$\underline{u(x_0, t_0) = f(x_0 - t_0)}$$

δηλαδή $\quad u(x,t) = f(x-t).$

<u>Πρόβλημα</u>

$$\begin{cases} u_t(x,t) + 2x\, u_x(x,t) = x + u(x,t) , & x \in \mathbb{R} \quad t>0 \\ u(x,0) = 1+x^2 \end{cases}$$

Πρόβλημα αρχικών τιμών.



θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.

$$\frac{d}{ds}\Big(u(x(s), t(s))\Big) = u_x \cdot x'(s) + u_t \cdot t'(s)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x'(s) = 2x(s) & , x(0)=x_1 \\ t'(s) = 1 & , t(0)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^{-2s} x'(s) - e^{-2s} \cdot 2x(s) = 0 \\ t(s) = s + t(0) \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{ds}\left(e^{-2s} \cdot x(s)\right) = 0 \\ x(0) = x_1 \\ t(s) = s \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^{-2s} \cdot x(s) = e^{-2 \cdot 0} x(0) = x_1 \\ t(s) = s \end{array}\right| \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(s) = x_1 \cdot e^{2s} \\ t(s) = s \end{array}}$$

τότε, $\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x \cdot x' + u_t \cdot t'$

$$= 2x \cdot u_x + u_t = x(s) + u(x(s), t(s)).$$

$$6(s) = u(x(s), t(s)) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6'(s) = x_1 e^{2s} + 6(s). \\ 6(0) = u(x(0), t(0)) \\ \quad = u(x_1, 0) \\ \quad = 1 + x_1^2. \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 6'(s) - 6(s) = x_1 \cdot e^{2s} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} e^{-s} \cdot 6'(s) - e^{-s} \cdot 6(s) = x_1 \cdot e^{s} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \left(e^{-s} \cdot 6(s)\right)' = x_1 e^{s} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \left(e^{-s} \cdot 6(s) - x_1 e^{s}\right)' = 0 \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{-s} 6(s) - x_1 e^{s} = e^{-0} 6(0) - x_1 e^{0} \\ 6(0) = 1 + x_1^2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} e^{-s} 6(s) - x_1 e^{s} = 1 + x_1^2 - x_1 \\ \Rightarrow 6(s) = x_1 e^{2s} + (1 - x_1 + x_1^2) e^{s}. \end{array}$$

$$u(x_1 e^{2s}, s) = x_1 e^{2s} + (1 - x_1 + x_1^2) e^{s}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = x_1 e^{2s} \\ t_0 = s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = x_0 e^{-2t_0} \\ t_0 = s \end{array} \right.$$

$$u(x_0, t_0) = x_0 e^{-2t_0} \cdot e^{2t_0} + (1 - x_0 e^{-2t_0} + x_0^2 \cdot e^{-4t_0}) \cdot e^{t_0}$$

$$u(x_0, t_0) = x_0 + e^{t_0} (1 - x_0 e^{-2t_0} + x_0^2 e^{-4t_0})$$

$$u(x, t) = x + e^{t} (1 - x \cdot e^{-2t} + x^2 \cdot e^{-4t}), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$$

$$a(t,x,u)\,u_x + \beta(t,x,u)\cdot u_t = \gamma(t,x,u)$$

$$\Rightarrow F(t,x,u,u_x,u_t) = 0$$

<u>Πρόβλημα</u>

Να λυθεί το Π.Α.Τ $\quad u_t + u_x = \dfrac{2x}{1+(x-t)^2}\,u^2, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$

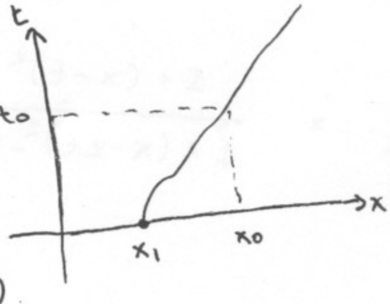
$$u(x,0) = 1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Η χαρακτηριστική καμπύλη $(x(s), t(s))$

$$\frac{d}{ds}u(x(s),t(s)) = u_x\cdot x'(s) + u_t\, t'(s)$$

Προσδιορίζουμε την καμπύλη έτσι ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} x'(s)=1 \\ t'(s)=1 \\ x(0)=x_1 \\ t(0)=0 \end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{l} x(s)=s+x_1 \\ t(s)=s \end{array}\right|$$



$$\underline{\sigma(s) = u(x(s),t(s))}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\sigma'(s) = u_x + u_t = \frac{2x(s)}{1+(x(s)-t(s))^2}\,\sigma^2(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma'(s) = \dfrac{2(s+x_1)}{1+(s+x_1-s)^2}\,\sigma^2(s), \quad s>0 \\ \sigma(0) = u(x(0),t(0)) = u(x,0) = 1 \end{array}\right| \iff$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma'(s) = \dfrac{2(s+x_1)}{1+x_1^2}\,\sigma^2(s) \\ \sigma(0)=1 \end{array}\right| \iff \frac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{2(s+x_1)}{1+x_1^2} \iff \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\sigma(s)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{1+x_1^2} + \frac{2x_1 s}{1+x_1^2}\right),$$

$$\sigma(0)=1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma(s)} - \frac{s^2}{1+x_1^2} - \frac{2x_1 s}{1+x_1^2} = -\frac{1}{1} \iff \frac{1}{\sigma(s)} = 1 - \frac{s^2}{1+x_1^2} - \frac{2x_1 s}{1+x_1^2}$$

$$\sigma(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1+x_1^2} - \frac{2x_1 s}{1+x_1^2}}$$

$$u(s+x_1, s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1+x_1^2} - \frac{2x_1 s}{1+x_1^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s + x_1 = x \\ s = t \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = x - t \\ s = t \end{array}\right.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\frac{1+(x-t)^2 - t^2 - 2t(x-t)}{1+(x-t)^2}}$$

$$u(x,t) = \frac{1+(x-t)^2}{1 + x^2 - 4tx + 2t^2} = \frac{1+(x-t)^2}{1 + x^2 - 4tx + (2t)^2 - (2t)^2 + 2t^2}$$

$$= \frac{1+(x-t)^2}{1+(x-2t)^2 - 2t^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left((x-2t)^2 = 2t^2 - 1 \quad \overset{\text{||}}{0} \quad t^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

29.2.2012

Άσκηση

Να λυθεί το Π.Α.Τ

$$(*)\quad u_t + u\cdot u_x = -u \quad , \quad x\in\mathbb{R} \quad t>0$$
$$u(x,0) = -\frac{x}{2} \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} u = u(x(s),\, t(s)) \\ x(0) = x_1 \\ t(0) = 0 \end{pmatrix}$$

$$a(x,t,u)\cdot u_t + \beta(x,t,u)\cdot u_x = \gamma(x,t,u)$$
$$F(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

Μ.Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης

Έστω $(x(s),\, t(s))$ η χαρακτηριστική καμπύλη.

$$\left.\begin{aligned} &t'(s) = 1, \quad s>0 \\ &x'(s) = u(x(s),t(s)) \\ &t(0) = 0 \\ &x(0) = x_1 \end{aligned}\right| \iff \left.\begin{aligned} &t'(s) = 1 \\ &x'(s) = -\frac{e^{-s}\cdot x_1}{2} \\ &t(0) = 0 \\ &x(0) = x_1 \end{aligned}\right| \iff \begin{aligned} &\underline{t(s) = s} \\ &\underline{x(s) = \tfrac{x_1}{2}(1+e^{-s})} \\ &t(0) = 0 \\ &x(0) = x_1 \end{aligned}$$

Άρα $\underline{u(x(s),t(s))} = u\left(\frac{x_1}{2}(1+e^{-s}),\, s\right) = \frac{-x_1 e^{-s}}{2} \iff \frac{x_1}{2}\cdot(1+e^{-s}) = x_0$

$$\iff \left.\begin{aligned} &x_1 = \frac{2x_0}{1+e^{-s}} \\ &t_0 = s \end{aligned}\right| \iff \begin{aligned} &x_1 = \frac{2x_0}{1+e^{-t_0}} \\ &t_0 = s \end{aligned}$$

$$u(x_0,t_0) = \frac{\frac{-\cancel{2}x_0}{1+e^{-t_0}}\cdot e^{-t_0}}{\cancel{2}} \iff u(x_0,t_0) = -\frac{x_0\cdot e^{-t_0}}{1+e^{-t_0}} = -\frac{x_0}{1+e^{t}}$$

άρα $u(x,t) = -\dfrac{x}{1+e^{t}}$, $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$.

- $t(s) = \int_0^s t'(s)\,ds = \int_0^s 1\,ds = s\Big|_0^s = s-0 = s$
- $\int_0^s (e^s\cdot \sigma(s))'\,ds = \int_0^s 0\,ds \iff [e^s\cdot\sigma(s)]_0^s = [c]_0^s = 0 \iff e^s\cdot\sigma(s) = e^0\cdot\sigma(0) = -\frac{x_1}{2}$.

$$\iff \sigma(s) = -\frac{x_1\cdot e^{-s}}{2}.$$

- $\frac{d}{ds}\big(u(x(s),t(s))\big) = u_x\cdot x' + u_t\cdot t'$. Έστω $\sigma(s) = u(x(s),t(s))$ τότε

$$\sigma'(s) = u_x\cdot x' + u_t\cdot t' \overset{(*)}{=} -u(x(s),t(s)) = -\sigma(s). \quad \text{και } \sigma(0) = u(x_1,0) = \frac{x_1}{2}$$

$$\begin{cases} \sigma'(s)+\sigma(s)=0, & s>0 \\ \sigma(0)=-\frac{x_1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (e^{s}\cdot\sigma(s))'=0 \\ \sigma(0)=-\frac{x_1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma(s)=-\frac{x_1\cdot e^{-s}}{2}, & s>0 \\ \sigma(0)=-\frac{x_1}{2} \end{cases}$$

- $$\int_0^s x'(s)\,ds=\int_0^s -\frac{e^{-s}\cdot x_1}{2}\,ds \iff [x(s)]_0^s=\frac{x_1}{2}\int_0^s (e^{-s})'\,ds \iff x(s)-x(0)=\frac{x_1}{2}\left[e^{-s}\right]_0^s$$

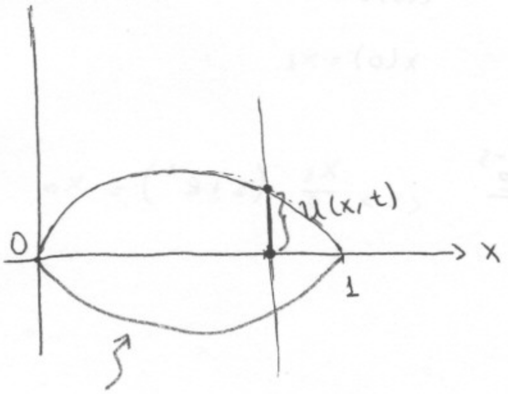
$$\iff x(s)-x_1=\frac{x_1}{2}(e^{-s}-1) \iff x(s)=\frac{x_1}{2}(1+e^{-s}).$$

Στο γενικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} t'(s)&=\alpha(x,t,\sigma) \\ x'(s)&=\beta(x,t,\sigma) \\ \sigma'(s)&=\gamma(x,t,\sigma) \end{aligned} \quad , \text{ όπου } \sigma(s)=u(x(s),t(s))$$

+ Αρχικές συνθήκες.

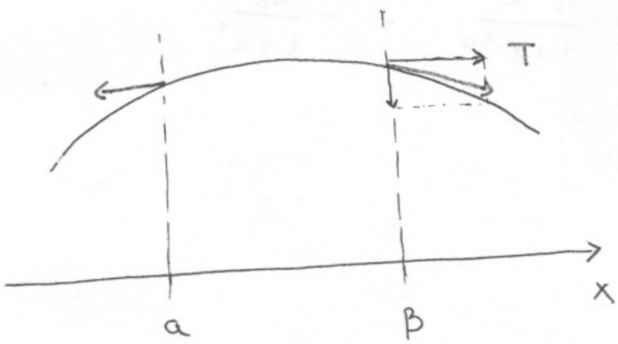
Παλλόμενη χορδή

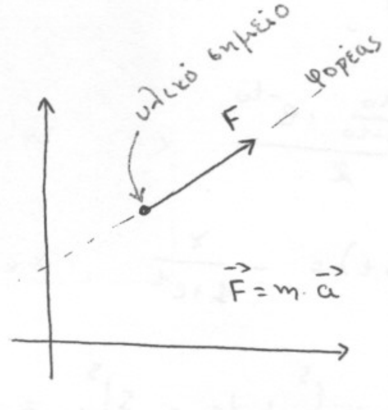


Αρχική θέση Χορδής

Εξίσωση θερμότητας
$(u_t=k\cdot u_{xx},\ k>0)$.

Ζητούμενο: Που βρίσκεται η χορδή τη χρονική στιγμή t.





$$T(\beta,t)\cdot\sin\theta(\beta,t)-T(a,t)\sin\theta(a,t)$$

$$T(\beta,t)\cdot\cos\theta(\beta,t)-T(a,t)\cos\theta(a,t)=0 \iff \frac{d}{dx}\left(T(x,t)\cdot\cos\theta(x,t)\right)=0$$

κομμάτι χορδ

$T(\beta,t)\cdot\sin\vartheta(\beta,t)$

$$m = \int_a^\beta p(x,t)\,dx = p_0\cdot$$

μάζα πυκνότητα

$$\frac{\int_a^\beta p(x,t)\cdot u(x,t)\,dx}{\int_a^\beta p(x,t)\,dt} = \frac{\int_a^\beta p(x,t)\cdot u(x,t)\,dx}{p_0(\beta-a)} = \frac{\cancel{p_0}\int_a^\beta u(x}{\cancel{p_0}(\beta-}$$

παραγωγίζω 2 φορές : $\gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\int_a^\beta u(x,t)\,dx}{\beta-a}\right)$ $\left(\vec{F} = m\right.$

$$,t)\sin\vartheta(\beta,t) - T(a,t)\sin\vartheta(a,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p_0\int_a^\beta u(x,t)\,dt\right) = p_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\cdot\sin\vartheta(x,t)\right)dx$$

$, = x$ $\quad g(\xi) = p_0 u_{tt}(\xi,t) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(T(\xi,t)\cdot\sin\vartheta(\xi,t)\right)$

$d\xi = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \ \forall\, x\in[0,1]$

Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$, f συ στο x_0, τότε $F(x)=\int_a^x f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0)=f($

χει παράγουσα
δεική συνάρτηση.

$$) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\cdot\sin\vartheta(x,t)\right)$$

$$)\cdot\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\Big)$$

$$\frac{du(x,t)}{dx} = \tan\vartheta(x,t)$$

$$\Rightarrow \sin\vartheta = \frac{\tan\vartheta}{\sqrt{1+\tan^2\vartheta}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$$

$$\overline{u_x^2}\cdot u_{xx} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)}^{0}\cdot u_x$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(T(x,t)\cdot\cos\vartheta(x,t)\right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{d}{\ }\left(T(\ldots\right.$

$$\frac{T(x,t)}{+u_x^2(x,t)}\cdot u_{xx}(x,t) \Rightarrow$$

$$u_{tt} - \frac{T_0}{\ }$$

Άρα $u_{tt}(x,t) = c^2 \cdot u_{xx}(x,t)$, $x \in [0,1]$, $t>0$

Υπερβολική Εξίσωση

Συνοριακές Συνθήκες (Σ.Σ) $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$

$u(1,t) = 0$, $t \geq 0$

Αρχικές Συνθήκες (Α.Σ) $u(x,0) = u_0(x)$

$u_t(x_0,0) = 0$, $x \in [0,1]$.

($u_t = k \cdot u_{xx}$: Εξίσωση διάδοσης της θερμότητας

παραβολική εξίσωση)

(Δυο χωρικές μεταβλητές

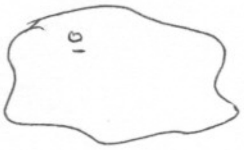
$u_t = k \cdot (u_{xx} + u_{yy})$)

<u>Ελλειπτική</u>

$\Delta u = 0$ ← Τελεστής Laplace

$u_{xx} + u_{yy} = 0$, $(x,y) \in \underline{\Omega}$

Αρμονικές Συναρτήσεις



+ Συνοριακές Συνθήκες

<u>Ταξινόμηση 2ας τάξεως</u>

<u>Δυο μεταβλητών</u>

$a(x,y) \cdot u_{xx} + 2\beta(x,y) \cdot u_{xy} + \gamma(x,y) \cdot u_{yy} + \delta(x,y) \cdot u_x + \varepsilon(x,y) \cdot u_y + \zeta(x,y) \cdot u = f$.

μη ομογενής γραμμική εξίσωση.

1.3.2012

Ταξινόμηση

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + \Gamma u_{yy} + \Delta u_x + E u_y + Z u = H$$

$\xi = \xi(x, y)$ $\qquad$ $u(x,y) = U(\xi, \eta)$

$\eta = \eta(x, y)$

Κανονική Μορφή (μόνο τοπικά)

I). $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + A_1 U_\xi + A_2 U_\eta + A_3 U = A_4$ (Ελλειπτικού τύπου).

όταν $\Delta = (2B)^2 - 4A\Gamma = 4(B^2 - A\Gamma) < 0$

II). $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + B_1 U_\xi + B_2 U_\eta + B_3 U = B_4$ (Υπερβολικού τύπου).

$(U_{\xi\eta} + \tilde{B}_1 U_\xi + \tilde{B}_2 U_\eta + \tilde{B}_3 U = \tilde{B}_4)$

όταν $\Delta = 4(B^2 - A\Gamma) > 0$

III). $U_{\xi\xi} + \Gamma_1 U_\xi + \Gamma_2 U_\eta + \Gamma_3 U = \Gamma_4$ (Παραβολικού Τύπου).

όταν $\Delta = 4(B^2 - A\Gamma) = 0$

Πρόβλημα

Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$4 u_{xx} - 12 u_{xy} + 9 u_{yy} + u_y = 0 \quad , x, y \in \mathbb{R}.$$

$\Delta = 4(6^2 - 4 \cdot 9) = 0$

Έστω $u(x,y) = U(\xi, \eta)$, όπου $\xi = \xi(x,y)$

$\eta = \eta(x,y)$

$$u(x,y) = U(\xi,\eta) \Rightarrow u_x(x,y) = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$u_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x\right)$$

$$= U_\xi \cdot \xi_{xy} + \xi_x\left(U_{\xi\xi} \cdot \xi_\eta + U_{\xi\eta} \cdot \eta_y\right) + U_\eta \cdot \eta_{xy} + \eta_x\left(U_{\eta\xi}\,\xi_y + U_{\eta\eta}\,\eta_y\right)$$

$u_{xx} = \dots$

$u_{xy} = \dots$

$\xi = ax + \beta y$

$\eta = \gamma x + \delta y$

. $u_x = aU_\xi + \gamma U_\eta$

. $u_y = \beta U_\xi + \delta U_\eta$

. $u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(aU_\xi + \gamma U_\eta) = a\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \gamma\left(U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} + U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$

$= a\beta U_{\xi\xi} + a\delta U_{\xi\eta} + \gamma\delta U_{\eta\eta} + \beta\gamma U_{\eta\xi}$

$= a\beta U_{\xi\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta} + (a\delta + \beta\gamma)U_{\xi\eta}$

. $u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(aU_\xi + \gamma U_\eta) = a\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \gamma\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$

$= a(aU_{\xi\xi} + \gamma U_{\xi\eta}) + \gamma(aU_{\eta\xi} + \gamma U_{\eta\eta})$

$= a^2U_{\xi\xi} + \gamma^2 U_{\eta\eta} + 2a\gamma U_{\xi\eta}$.

$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\beta U_\xi + \delta U_\eta) = \beta\left(U_{\xi\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + U_{\xi\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \delta\left(U_{\eta\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + U_{\eta\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$

$= \beta^2 U_{\xi\xi} + \delta^2 U_{\eta\eta} + 2\beta\delta U_{\xi\eta}$.

πότε, $4(a^2U_{\xi\xi} + \gamma^2U_{\eta\eta} + 2a\gamma U_{\xi\eta}) - 12\left(a\beta U_{\xi\xi} + \gamma\delta U_{\eta\eta} + (a\delta + \beta\gamma)U_{\xi\eta}\right) +$

$+ 9(\beta^2 U_{\xi\xi} + \delta^2 U_{\eta\eta} + 2\beta\delta U_{\xi\eta}) + \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0$

$\Rightarrow (4a^2 + 9\beta^2 - 12a\beta)U_{\xi\xi} + \left(8\gamma a + 18\beta\delta - 12(a\delta + \beta\gamma)\right)U_{\xi\eta} + (4\gamma^2 + 9\delta^2 - 12\gamma\delta)U_{\eta\eta}$

$+ \beta U_\xi + \delta U_\eta = 0$

$(2a - 3\beta)^2 U_{\xi\xi} + \left(8\gamma a + 18\beta\delta - 12(a\delta + \beta\gamma)\right)U_{\xi\eta} + (2\gamma - 3\delta)^2 U_{\eta\eta} + \beta U_\xi + \delta U_\eta =$

άρα $\left[(2\gamma - 3\delta)^2 = 0\right]$ $\quad 4\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 - 12\frac{\gamma}{\delta} + 9 = 0 \Rightarrow 4t^2 - 12t + 9 = 0$

$4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\gamma = \frac{3}{2}\delta}$

και $8\alpha\gamma + 18\beta\delta - 12(\alpha\delta + \beta\gamma) = 0$

$$8\alpha\gamma + 18\beta\delta - 12\alpha\delta - 12\beta\gamma = 0$$

$$8\alpha\frac{3}{2}\delta + 18\beta\delta - 12\alpha\delta - 12\beta\cdot\frac{3}{2}\delta = 0$$

$$12\alpha\delta + 18\beta\delta - 12\alpha\delta - 18\beta\delta = 0 \quad \checkmark$$

αν επιλέξουμε $\beta = 0$: $4\alpha^2 U_{\xi\xi} + \delta U_\eta = 0$.

για $\alpha = 1$ και $\delta = -4$

καταλήγουμε ότι $U_\eta = U_{\xi\xi}$. Παραβολική Εξίσωση.

$\underline{\Delta < 0}$ $\quad \underbrace{\smile U_{\xi\xi} + \smile}_{=} U_{\eta\eta} + \dots$

$\underline{\Delta = 0}$ $\quad U_{\xi\xi} - U_\eta = AU + B$

$\underline{\Delta > 0}$ $\quad U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta} + \dots$

$U_{\xi\eta}$ + 1ης τάξης

$\smile U_{\xi\xi}$

$\smile U_{\eta\eta}$

0

μηδενίζουμε τους συντελεστές

<u>Κυματική Εξίσωση</u> $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $c > 0$

Εξίσωση υπερβολικού τύπου

$\Delta = 4c^2 > 0$, $\rho = \pm c$.

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

οπότε $\frac{x}{t} = \pm c$

στο καινούριο σύστημα θα είναι:

$U_{\xi\eta} = 0$

$x = \pm ct$.

$\xi = x - ct$

$\eta = x + ct$.

$u(x,t) = U(\xi, \eta)$

$\xi = x - ct$

$\eta = x + ct$

$$\Rightarrow \quad \bullet\ u_t = U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c U_\xi + c U_\eta$$

$$\bullet\ u_{tt} = c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(-U_\xi + U_\eta\right)$$

$$= c^2 U_{\xi\xi} - c^2 U_{\eta\eta} - 2c^2 U_{\xi\eta}$$

$$\bullet\ u_x = U_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\xi + U_\eta$$

$$\bullet\ u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U_\xi + U_\eta\right)$$

$$= U_{\xi\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + U_{\xi\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + U_{\eta\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + U_{\xi\eta} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

$$c^2\left(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta}\right) - c^2\left(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -4c^2 U_{\xi\eta} = 0$$

$$\overset{c \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad U_{\xi\eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(U_\xi(\xi,\eta)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(U(\xi,\eta) - \underbrace{\int_0^\xi f(t)\,dt}_{F(\xi)}\Big) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$U(\xi,\eta) - F(\xi) = \phi(\eta)$$

$$U(\xi,\eta) = F(\xi) + \phi(\eta).$$

Επομένως, $u(x,t) = U(\xi,\eta) = F(\xi) + \phi(\eta)$

$$= F(x - ct) + \phi(x + ct).$$

Πρόβλημα

Να βρεθεί η λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, t

$u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Η λύση έχει τη μορφή $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$.

Ο προσδιορισμός του F, G θα γίνει ώστε το πρόβλημα να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

$$\boxed{u \in D^{\overset{x\ t}{2,2}}(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C^{\overset{x\ t}{0,1}}(\mathbb{R} \times [0,+\infty))}$$

D: x, t 2 φορές παραγωγίσιμες

C: x απλά συνεχής, t: συνεχή παράγωγο

Αφού η $u \in C(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ πρέπει $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u(x,0)$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t \to 0^+} \left(F(x-ct) + G(x+ct) \right) = f(x)$$

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$u_t(x,t) = -cF'(x-ct) + cG'(x+ct), \quad t > 0.$$

$$\lim_{t \to 0^+} u_t(x,t) = u_t(x,0) = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) + G(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ F'(x) + cG'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}\right| \quad g \in C(\mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dx}\left(-cF(x) + cG(x)\right) = g(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)\,dt\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(-cF(x) + cG(x) - \int_0^x g(\xi)\,d\xi\right) = 0 \Rightarrow -cF(x) + cG(x) - \int_0^x g(\xi)\,d\xi$$

24

$$F(x)+G(x)=f(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}$$
$$-F(x)+G(x)=\frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds+\frac{k}{c}\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow$

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds+\frac{k}{2c}$$
$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds-\frac{k}{2c}$$

Επομένως, $$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)\,ds-\cancel{\frac{k}{2c}}+\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}\int_0^{x+ct} g(s)+\cancel{\frac{k}{2c}}$$
$$=\frac{1}{2}\big(f(x-ct)+f(x+ct)\big)+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

$f\in D^2(\mathbb{R}),\quad g\in D^1(\mathbb{R}).$

6.3.2012

<u>Κυματική Εξίσωση</u>

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$ $t>0$

$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$

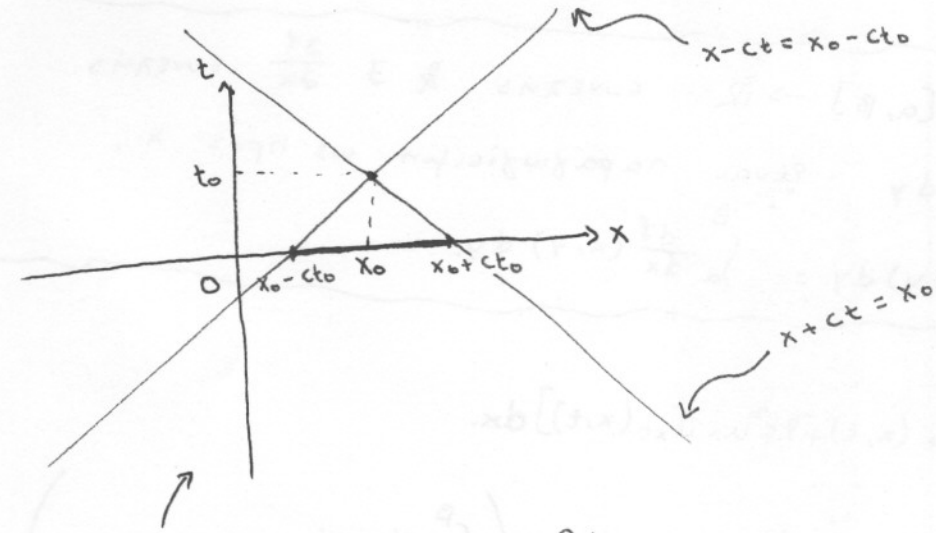
για να έχουμε λύση:

$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$

$\psi \in C^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) - \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau \quad , \quad x \in \mathbb{R},\ t>0.$$

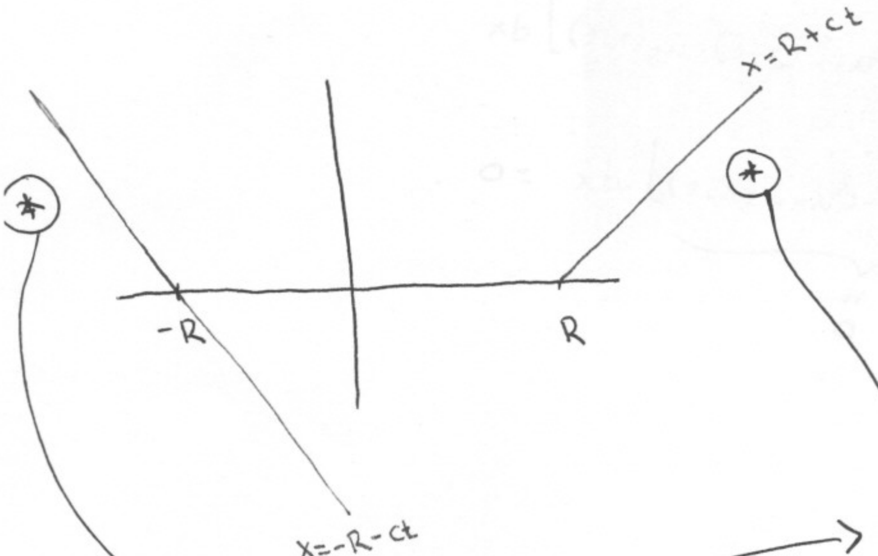


Συμπαγής φορέας: f έχει συμπαγή φορέα, $\exists R>0 : f(x) = c$, $|x| \geq R$

1). <u>Κώνος εξάρτησης της λύσης</u>

2). Αν η φ και η ψ έχουν συμπαγή φορέα.

(Πότε η λύση μας είναι 0? Όταν ο κώνος εξάρτησης της λύσης είναι αριστερά του $-R$ ($x_0 \leq -R - ct_0$) ή δεξιά του R ($x_0 \geq R + ct_0$))



Εκτός φορέα είναι μηδέν.

Ενέργεια του συστήματος

Κινητική Ενέργεια $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\,dx$

Δυναμική Ενέργεια $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t)\,dx$

Ολική Ενέργεια τη χρονική στιγμή t: $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_t^2(x,t)+c^2u_x^2(x,t)\right)dx.$

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0. \quad , \ t>0$$

Θεώρημα: Έστω $f:[A,B]\times[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής & $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x}$ συνεχής.

Τότε $x \longmapsto \int_a^\beta f(x,y)\,dy$ είναι παραγωγίσιμη ως προς x,

και μάλιστα $\frac{d}{dx}\int_a^\beta f(x,y)\,dy = \int_a^\beta \frac{df}{dx}(x,y)\,dy.$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2u_t\, u_{tt}(x,t) + 2c^2 u_x u_{xt}(x,t)\right]dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x u_{xt}(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x(x,t)\cdot\left(u_t(x,t)\right)_x\,dx \qquad \left(\int_a^\beta f'\cdot g\,dx = f\cdot g\Big|_a^\beta - \int_a^\beta f\cdot g'\,dx\right)$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_{xx}(x,t)\cdot u_t(x,t)\,dx.$$

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[u_t(x,t)\cdot u_{tt}(x,t) - c^2u_{xx}(x,t)\cdot u_t(x,t)\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)\underbrace{\left[u_{tt}(x,t) - c^2u_{xx}(x,t)\right]}_{= 0}dx = 0.$$

<u>Θεώρημα</u> (το μονοσήμαντο των λύσεων)

Το πρόβλημα

$$(*)\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x\in\mathbb{R} \quad t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

έχει το πολύ μια λύση.

<u>Απόδειξη</u>

"Απλή λύση"

Απαγωγή σε άτοπο. Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις. Τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad x\in\mathbb{R} \quad t>0.$$

$$w(x,0) = 0, \quad x\in\mathbb{R} \Rightarrow w_x(x,0) = 0.$$

$$w_t(x,0) = 0, \quad x\in\mathbb{R}$$

$\Big(u_{1,tt} - u_{2,tt} - c^2(u_{1,xx} - u_{2,xx}) = u_{1,tt} - c^2 u_{1,xx} - (u_{2,tt} - c^2 u_{2,xx}) = 0 \Big).$

$\Big(w(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \Big)$

θέτουμε, $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)\right]dx, \quad t>0$

$$E'(t) = 0, \quad t>0$$

$$\Downarrow$$

$$E(t) = E(0), \quad t>0$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cancelto{0}{w_t^2(x,0)} + c^2 \cancelto{0}{w_x^2(x,0)}\right]dx$$

$$= 0$$

Επομένως, $E(t) = 0 \iff \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)\right]dx = 0.$

$\Downarrow \leftarrow w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)$ συνεχής

$$w_t(x,t) = 0 \quad x\in\mathbb{R} \quad t\geq 0$$

$$w_x(x,t) = 0$$

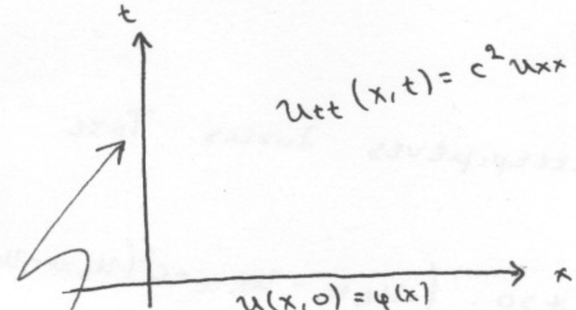
$\Rightarrow \; w(x,t) = w(x,0) = 0$

$\Rightarrow \; w \equiv 0$, Άτοπο

Οι περιττές συναρτήσεις σχετίζονται με Dirichlet Σ.Σ

Οι άρτιες συναρτήσεις σχετίζονται με Neumann Σ.Σ.

Ανακλώμενα Κύματα



$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$, $x>0$, $t>0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $x \geq 0$

$u_t(x,0) = \psi(x)$

συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & , x>0 \quad t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & , x>0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & , x>0 \end{cases}$$

$\varphi \in C^2[[0,+\infty)]$

$\psi \in C^1[[0,+\infty)]$

$\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$

Neumann Σ.Σ $\rightarrow u_x(0,t) = 0$, $t \geq 0$

Dirichlet Σ.Σ $\rightarrow$ $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$

Περιττή Επέκταση συνάρτησης

Επέκταση: $A \subseteq \mathbb{R}$

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{f}(x) = f(x)$, $x \in A$.

$\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Περιττή Συνάρτηση

$f(-x) = -f(x)$

I συμμετρικό διάστημα

$\forall x \in I \Rightarrow -x \in I$.

Άρτια Συνάρτηση

$f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Αν f τυχαία συνάρτηση, πάντα μπορούμε να τη γράψαμε ως $f = g + h$ όπου g άρτια και h περιττή.

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

$$\varphi_{\pi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

περιττή

$$\psi_{\pi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & , x \geq 0 \\ -\psi(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Επεκτάσεις των φ, ψ.

$\varphi_{\pi} \in C^2(\mathbb{R})$

$\psi_{\pi} \in C^1(\mathbb{R})$

Νέο πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & , x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ v(x,0) = \varphi_{\pi}(x) & , x \in \mathbb{R} \\ v_t(x,0) = \psi_{\pi}(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi_{\pi}(x+ct) + \varphi_{\pi}(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\pi}(s)\,ds.$$

$$v(0,t) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\varphi_{\pi}(ct) + \varphi_{\pi}(-ct)}_{0}\Big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \psi_{\pi}(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \psi_{\pi}(s)\,ds$$

(Άσκηση. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή, συνεχής. Τότε $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$)

$$= 0.$$

(συνεπώς, ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Και άρα

$$u(x,t) = v(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi_{\pi}(x+ct) + \varphi_{\pi}(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\pi}(s)\,ds.$$

Είναι μια λύση του προβλήματος στην ημιευθεία.

$u_{xx} \quad , \; x>0 \quad t>0$

7.3.2019

A.Σ $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & , \; x>0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & , \; x>0 \end{cases}$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \; x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & , \; x<0 \end{cases}$$

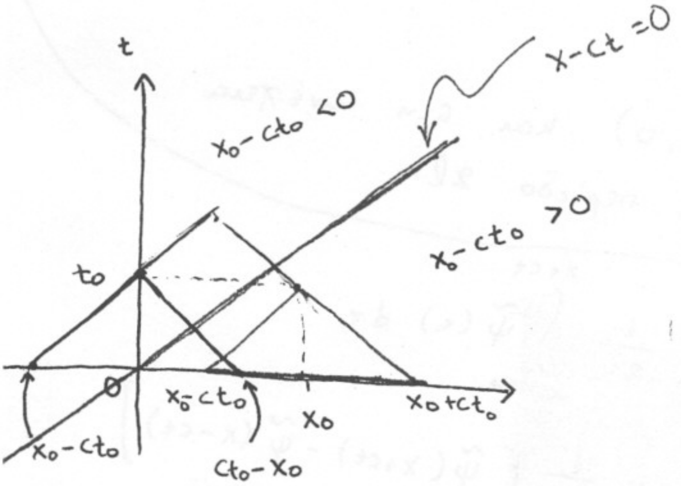
Σ.Σ $u(0,t) = 0 \quad , \; x \geq 0$

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} \quad , \; x \in \mathbb{R} \; , \; t>0$$

A.Σ $\begin{cases} v(x,0) = \varphi_n(x) \\ v_t(x,0) = \psi_n(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi_n(x-ct) + \varphi(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_n(\tau)\,d\tau.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi_n(x-ct) + \varphi_n(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_n(\tau)\,d\tau.$$



αν $(x,t):\; x-ct>0 \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)\,d$

αν $(x,t):\; x-ct<0 \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi_n(x-ct) + \varphi_n(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_n(\tau)$

$$= \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\Big(\underbrace{\int_{x-ct}^{0}\psi_n(\tau)\,d\tau}_{\int_{ct-x}^{0}\psi(\tau)\,dt} + \int_0^{x+ct}\psi(\tau)$$

$$\int_{x-ct}^{0}\psi_n(\tau)\,d\tau = \int_{x-ct}^{0} -\psi(-\tau)\,d\tau \;\xrightarrow[d\rho=-d\tau]{\rho=-\tau}\; \int_{ct-x}^{0}\psi(\rho)\,d\rho \Bigg)$$

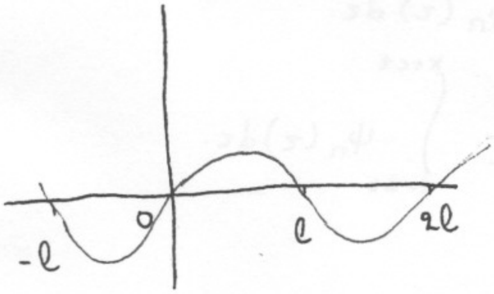
$$= \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+ct) + \varphi(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x} \psi(\tau)\,d\tau$$

<u>Αλλαγή Στόχου</u> : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$\text{Α.Σ} \begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad 0 < x < l$$

$$\text{Σ.Σ} \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

Tip:
Αν είχαμε Neumann Σ.Σ, θα κάναμε άρτια επέκταση κι αυτό θα αντιπροσώπευε τη λύση.



Κάνουμε περιττή επέκταση στο $(-l, 0)$ και στη συνέχεια παίρνουμε την περιοδική επέκταση με περίοδο $2l$.

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde\varphi(x+ct) + \tilde\varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde\psi(\tau)\,d\tau.$$

$$v_x(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde\varphi'(x+ct) + \tilde\varphi'(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left[\tilde\psi(x+ct) - \tilde\psi(x-ct)\right]$$

$$) = v_x(0,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde\varphi'(ct) + \tilde\varphi'(-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left[\tilde\psi(ct) - \tilde\psi(-ct)\right].$$

$$\Downarrow$$

$\tilde\varphi'(ct) = -\tilde\varphi'(-ct)$ & $\tilde\psi(ct) = \tilde\psi(-ct)$

φ' περιττή $\qquad\qquad$ ψ άρτια

$\downarrow$

φ άρτια.

Λύση της μη ομογενούς Κυματικής Εξίσωσης

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad t>0$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

(Γραμμικό σύστημα:

$AX = B$

Βρίσκουμε μια ειδική λύση x_0 : $AX_0 = B$

όλες τις λύσεις της ομογενούς $Ax=0$)

Αν v η λύση:

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad t>0$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$v_t(x,0) = \psi(x)$$

Αν θέσουμε $u = v + w$.

τότε $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \iff v_{tt} + w_{tt} - c^2(v_{xx} + w_{xx}) = f \iff$

$$\underbrace{v_{tt} - c^2 v_{xx}}_{=0} + w_{tt} - c^2 w_{xx} = f$$

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = f \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad t>0.$$

$$w(x,0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$w_t(x,0) = 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \iff \underbrace{v(x,0)}_{\varphi(x)} + w(x,0) = \varphi(x) \iff w(x,0) = 0$$

Πως θα λύσουμε αυτή την εξίσωση?

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad t>0$$

$$u(x,0) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}$$

<u>1ος τρόπος</u> (με αλλαγή συστήματος συν/νων).

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\xi+\eta) \\ t &= \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi) \end{aligned}$$

$$u(x,t) = U(\xi,\eta)$$

<u>Παλαιό Σ.Α</u> $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $\underline{t>0}$

$u(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = 0$

$$u_t(x,t) = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= -c\frac{\partial U}{\partial \xi} + c\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$0 = u_t(x,0) = -c\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi) + c\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi)$$

<u>Νέο Σύστημα</u>

$$-4c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} U(\xi,\eta) = f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right) \quad \eta > \xi, \ \xi \in \mathbb{R}$$

$U(\xi,\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi,\xi) = \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi) \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} U(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta}\left[-\frac{1}{4c^2}\int_{\xi}^{\eta} f\left(\frac{\xi+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\xi}{2c}\right) d\vartheta\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_{\xi}^{\eta} f\left(\frac{\xi+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\xi}{2c}\right) d\vartheta\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_{\xi}^{\eta} f\left(\frac{\xi+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\xi}{2c}\right) d\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi) + \frac{1}{4c^2}\overbrace{\cancel{\int_{\xi}^{\xi} f\left(\frac{\xi+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\xi}{2c}\right) d\vartheta}}^{0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\int_{\xi}^{\eta} f\left(\frac{\xi+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\xi}{2c}\right) d\vartheta + \cancel{\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi)} \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\int_{\eta}^{\xi}\int_{\tau}^{\eta} f\left(\frac{\tau+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\tau}{2c}\right) d\vartheta\, d\tau\right].$$

$$\left((*) \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(U(\xi,\xi)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} U(\xi,\xi) = 0 \Rightarrow 2\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\xi) = 0. \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[U(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\int_{\eta}^{\xi}\int_{\tau}^{\eta} f\left(\frac{\tau+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\tau}{2c}\right) d\vartheta\, d\tau\right] = 0$$

$$U(\xi,\eta) + \frac{1}{4c^2}\iint \quad = U(\eta,\eta) = 0.$$

$$U(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\int_{\eta}^{\xi}\int_{\tau}^{\eta} f\left(\frac{\tau+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\tau}{2c}\right) d\vartheta\, d\tau$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{4c^2}\int_{x+ct}^{x-ct}\int_{\tau}^{x+ct} f\left(\frac{\tau+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\tau}{2c}\right) d\vartheta\, d\tau.$$

<u>Καλούμε</u> $\frac{\tau+\vartheta}{2} = \xi$

$\frac{\vartheta-\tau}{2c} = \eta$ $\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = 1, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} = c$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \tau+\vartheta = 2\xi \\ \vartheta-\tau = 2c\eta \end{array} \Bigg| \Leftrightarrow \Bigg| \begin{array}{l} \vartheta = \xi + c\eta \\ \tau = \xi - c\eta \end{array} \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\xi} = 1, \quad \frac{\partial\tau}{\partial\xi} = -c.$$

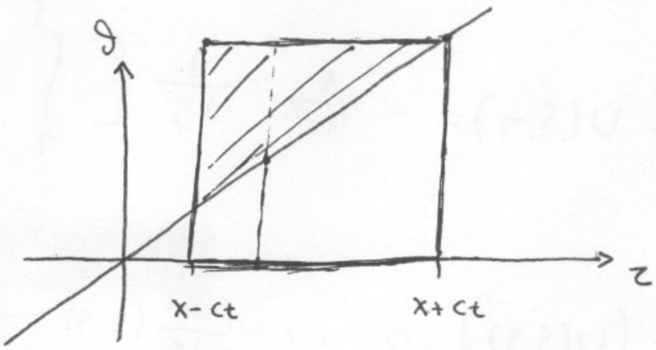
$$\left(\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} f(h(u,v), g(u,v))\cdot\left| J\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \right.$$

$x = h(u,v)$

$y = g(u,v)$

$$\left. J\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \right)$$

$$= -\frac{1}{4c^2} \int \int f(\xi,\eta)\, 2c \, d\xi \, d\eta$$



$x-ct \le \tau \le x+ct$

$\underline{x-ct \le \xi - c\eta \le x+ct}$

$\tau \le \vartheta \le x+ct$

$\underline{\tau \le \xi + c\eta \le x+ct}$

...

8.3.2012

$a(x,t,u)\cdot u_t + \beta(x,t,u)\cdot u_x = \gamma(x,t,u)$

Στόχος : καλούμε λύση την $\sigma(s) = u(x(s), t(s))$

$\sigma'(s) = u_x \cdot x + u_t \cdot t$

$x' = \beta(x,t,\sigma)$

$t' = a(x,t,\sigma)$

$\sigma' = \gamma(x,t,\sigma)$.

Π.χ Να λυθεί το Π.Α.Τ

$u_t + u_x^2 = 0 \quad , x \in \mathbb{R} \quad t>0$

$u(x,0) = 3x \quad x \in \mathbb{R}$

Παραγωγίζω ως προς u_x και έχω $u_{tx} + 2u_x \cdot u_{xx} = 0$

$u_x(x,0) = 3$

και $u_x(x,t) = v(x,t)$

άρα $v_t + 2v\cdot v_x = 0$

$v(x,0) = 3$

$\sigma(s) = v(x(s), t(s))$

$\sigma'(s) = v_x \cdot x' + v_t \cdot t'$

και
$x(s) = 6s + x_1$
$x'(s) = 2\sigma(s) \quad , x(0) = x_1$
$t(s) = s$
$t'(s) = 1 \quad , t(0) = 0$
$\sigma(s) = 3$
$\sigma'(s) = 0 \quad , \sigma(0) = v(x(0), t(0))$

$= v(x_1, 0) = 3$

άρα $v(6s + x_1, s) = 3$

$V(6s + x_1, s) = 3$

$s = \bar{s}$, $x(\bar{s}) = x_0$

$t(\bar{s}) = t_0$

$v(6\bar{s} + x_1, \bar{s}) = 3$

$v(x_0, t_0) = 3$, (οπουδήποτε η V είναι 3)

άρα

$v_x(x,t) = 3$ και $u_t(x,t) + 9 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$u(x,0) = 3x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\left(u(x,t) + 9t\right) = 0$$

για $t=0$: $u(x,t) + 9t = u(x,0) + 9 \cdot 0 = 3x$

$\Rightarrow u(x,t) = 3x - 9t$..

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$u(x,0) = 0$

$u_t(x,0) = 0$

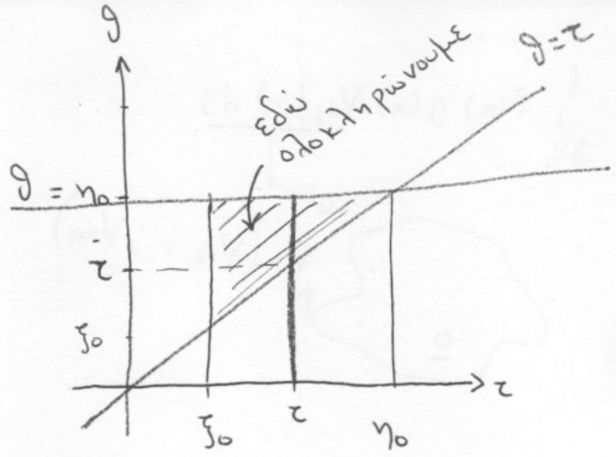
$$\left.\begin{array}{l} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi) \end{array}$$

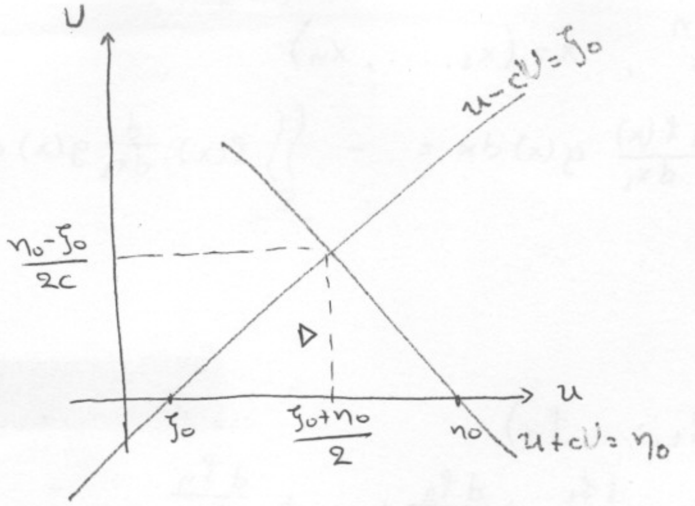
θέτω $u(x,t) = U(\xi,\eta)$ και έχω:

$$-4c^2 U(\xi,\eta) = f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right) \quad , \eta > \xi , \ \xi \in \mathbb{R}$$

μετά ολοκληρώσαμε δυο φορές και έχουμε:

$$U(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\eta_0}^{\xi_0} \int_{\tau}^{\eta_0} f\left(\frac{\tau+\vartheta}{2}, \frac{\vartheta-\tau}{2}\right) d\vartheta \, d\tau .$$





$$u = \frac{\vartheta+\tau}{2} \quad (*) \quad , \quad U = \frac{\vartheta-\tau}{2} \quad \to \text{ιακωβιανή} \quad d\vartheta\, d\tau = 2c\, du\, dU$$

θέλω το κομμάτι $\tau = \xi_0$ στην (*)

$$\left.\begin{aligned} \tau + \vartheta &= 2u \\ \vartheta - \tau &= 2U \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \begin{aligned} \vartheta &= u + cU \\ \tau &= u - cU \end{aligned}$$

$$\overset{\tau=\xi_0}{\Longrightarrow} \quad \xi_0 = u - cU$$

θέλω τα $\vartheta = \eta_0 \Leftrightarrow \eta_0 = u + cU$.

$$\left.\begin{aligned} u - cU &= \xi_0 \\ u + cU &= \eta_0 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \quad u = \frac{\xi_0+\eta_0}{2} \quad \text{και} \quad U = \frac{\eta_0-\xi_0}{2c}$$

άρα η λύση θα είναι $U(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2c} \iint_\Delta f(u,U)\, du\, dU$

$$\| $$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \iint \dots$$

$$\xi_0 = x_0 - ct_0$$

$$\eta_0 = x_0 + ct_0$$

→ θέλουμε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τον τύπο του Green.

<u>Τύπος Green</u> $\quad \iint \left(\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dy} \right) dx\, dy = \int_{\partial\Omega} [f(x,y)\, dy + g(x,y)\, dx]$

$\underline{O} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\iint_{\underline{O}} \frac{d f(x)}{d x_1} g(x)\, dx = - \iint_{\underline{O}} f(x) \frac{d}{dx_1} g(x)\, dx + \int_{\partial \underline{O}} f(x)\, g(x)\, \underline{V_{x_1}(x)\, dS}$$

$V = (V_{x_1}, \dots, V_{x_n})$

$F = (f_1, \dots, f_n)$

$$\operatorname{div} F = \frac{d f_1}{d x_1} + \frac{d f_2}{d x_2} + \dots + \frac{d f_n}{d x_n}$$

$$\int_{\underline{O}} \operatorname{div} F = \int_{\partial \underline{O}} F \cdot v \, dS$$

<u>Ταυτότητες του Green</u>

1). $$\int_{\underline{O}} f(x) \cdot \Delta g(x) = - \int_{\underline{O}} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx + \int_{\partial \underline{O}} f(x) \cdot \frac{dg}{dv}\, ds.$$

2). $$\int_{\underline{O}} \big(f(x) \cdot \Delta g(x) - g(x) \cdot \Delta f(x) \big)\, dx = \int_{\partial \underline{O}} \left(f(x) \cdot \frac{d g(x)}{du} - g(x) \cdot \frac{d f(x)}{dv} \right) ds.$$

$\Delta g(x) \to$ Λαπλασιανή του $g(x)$

$$= \frac{d^2 g}{dx_1^2} + \frac{d^2 g}{dx_2^2} + \dots + \frac{d^2 g}{dx_n^2}$$

$\frac{dg}{dv} \to$ κατά κατεύθυνση παράγωγος της g

$$= \nabla g \cdot v$$

<u>2η λύση</u>

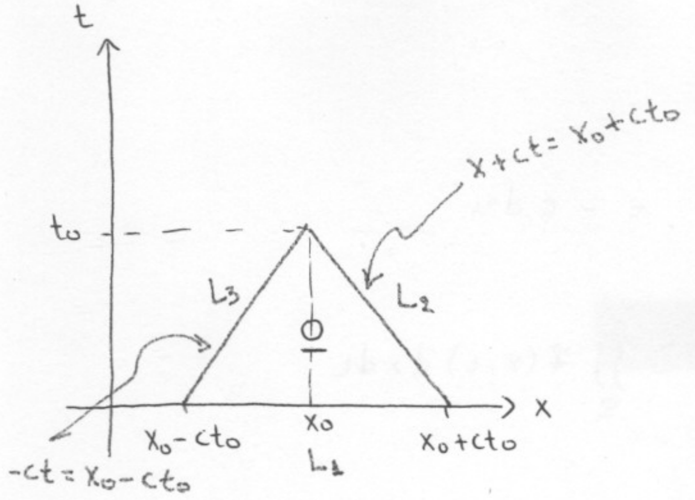
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

Ο τύπος του Green θα γίνει: $\iint \left(\frac{dF}{dx} - \frac{dG}{dt} \right) dx\, dt$

$$= \int_{\partial \underline{O}} \big[F(x,t)\, dt + G(x,t)\, dx \big]$$

$F(x,t) = -c^2 u_{xx}$

$G(x,t) = -u_t$



$$\iint_{\underline{O}} [F_x - G_t]\, dx\, dt = \iint_{\underline{O}} [-c^2 u_{xx} + u_{tt}]\, dx\, dt = \iint_{\underline{O}} f(x,t)\, dx\, dt.$$

$$\mathrm{I} = \int_{L_1} [-c^2 \cancel{u_x}^{\,0}\, dt - u_t\, dx] = -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(x,0)\, dx = 0$$

$$\mathrm{II} = \int_{L_2} [-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx] = c\int_{L_2} du = c\left(u(x_0,t_0) - \cancel{u(x_0+ct_0,0)}^{\,0}\right)$$

$$= c\cdot u(x_0,t_0)$$

L_2: $x+ct = x_0+ct_0$, αν παραγωγίσω $dx + c\,dt = 0$

$$\Rightarrow c\,dt = -dx$$

$$du = u_x\cdot dx + u_t\, dt.$$

Εμείς έχουμε $-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx = -c\,u_x(-dx) - u_t(-c\,dt)$

$$= c\cdot u_x\, dx + c\cdot u_t\, dt$$

$$= c(u_x\, dx + u_t\, dt)$$

$$= c\cdot du.$$

$$\mathrm{III} = \int_{L_3} [-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx] = -c\int_{L_3} du = -c\left[\cancel{u(x_0-ct_0,0)}^{\,0} - u(x_0,t_0)\right]$$

$$= c\cdot u(x_0,t_0)$$

$L_3: \; dx - c\,dt = 0 \;\Rightarrow\; dx = c \cdot dt$

$$du = u_x dx + u_t dt$$

$$-c^2 u_x dt - u_t dx = -c u_x dx - c u_t dt = -c\,du$$

άρα $\displaystyle\int_{\partial\Omega} [F dt + G dx] = 2c\, u(x_0, t_0) = \iint_{\Omega} f(x,t)\, dx\, dt$

Αναπαράσταση του κώνου

$$\iint_{\mathcal{C}(x_0,t_0)} f(x,t)\, dx\, dt = \int_0^{t_0} \int_{x_0 - c(t_0 - s)}^{x_0 + c(t_0 - s)} f(x,s)\, dx\, ds$$

Άσκηση

Να αποδείξετε το μονοσήμαντο των λύσεων:

A). $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$

B). $2u_{xx} - u_{tt} + u_{xt} = f(x,t)$

$u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις, τότε $w = u_1 - u_2$ λύνει τα αντίστοιχα ομογενή προβλήματα.

A). $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$w(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$w_t(x,0) = 0$

B). $2w_{xx} - w_{tt} + w_{xt} = 0$

$$w(x,0) = 0$$
$$w_t(x,0) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>Για το A)</u> $w_t(w_{tt} - c^2 w_{xx}) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} w_t(x,t)\cdot\left[w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t)\right]dx$

$$\Rightarrow \int\left[w_t\cdot w_{tt} - c^2 w_t\cdot w_{xx}\right]dx = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} w_t^2 - \underbrace{c^2\int_{-\infty}^{+\infty} w_t\cdot w_{xx}\,dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} w_t^2 + \frac{1}{2}c^2\int_{-\infty}^{+\infty} w_x^2\right] \qquad c^2\int_{-\infty}^{+\infty} w_{tx}\, w_x\, dx = c^2\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} w_x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0)\right]dx$$

$$\Rightarrow w_t = 0 \Rightarrow w \equiv 0$$

<u>Για το B)</u> Θέλω να εμφανιστεί η παράγωγος προς τον χρόνο, άρα πολ/ζω την Δ.Ε (διαφορική εξίσωση) με το w_t.

$$w_t(2w_x - w_{tt} + w_{xt}) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2w_t\cdot w_{xx} - w_t w_{tt} + w_t\cdot w_{xt}\right]dx = 0$$

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty} w_{tx}\cdot w_x - \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} w_t^2 = 0$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_t\cdot w_{xt}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}w_t^2\right)_x dx = 0\right).$$

$$-\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w_x^2\, dx - \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w_t^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} w_x^2(x,t) + \frac{1}{2}\, w_t^2\,(x,t)\, dx\right] = 0$$

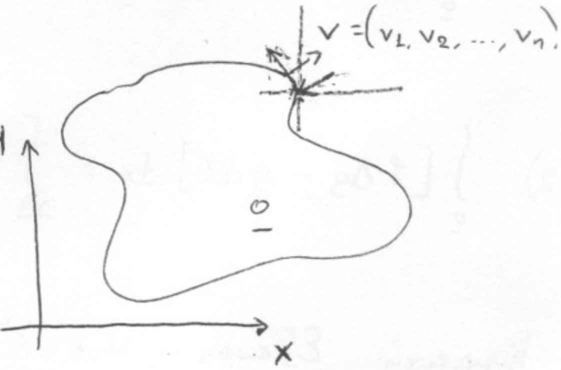
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\left[w_x^2(x,t) + \frac{1}{2}\, w_t^2(x,t)\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cancel{w_x^2(x,0)}^{\,0} + \frac{1}{2}\, \cancel{w_t^2(x,0)}^{\,0}\right] dx$$

άρα $w_t = 0 \Rightarrow w(x,t) = w(x,0) \Rightarrow w(x,t) = 0.$

Πρόοδος 2/5
7-9

13.3.2012

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = -\int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial x_i} g \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot g \, v_i \, ds.$$



$(x(s), y(s))$, $s \in [0,1]$

Εφαπτόμενο: $(x'(s), y'(s))$

κάθετο

$$\frac{(-y'(s), \; x'(s))}{\sqrt{(x'(s))^2 + y'(s)^2}}$$: μοναδιαίο

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} \, ds \qquad , \qquad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} \, ds.$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx\, dy = -\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx\, dy + \underbrace{\int_{\partial\Omega} f \cdot g \left(\frac{-y'}{\cancel{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \right) \cancel{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \, ds}_{-\int_{\partial\Omega} f \cdot g \, \underbrace{y'(s)\, ds}_{dy}}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx\, dy = -\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx\, dy - \int_{\partial\Omega} f \cdot g \, dy$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} g \, dx\, dy = -\int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} dx\, dy + \int_{\partial\Omega} f \cdot g \, dx$$

Ταυτότητα του Green: $$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \left[Q \, dx + P \, dy \right].$$

1) $\int_{\Omega} f\,\Delta g\,dx = -\int_{\Omega} \nabla f\cdot\nabla g\,dx + \int_{\partial\Omega} f\cdot\frac{\partial g}{\partial \nu}\,dS$

2). $\int_{\Omega}\left[f\cdot\Delta g - g\cdot\Delta f\right]dx = \int_{\partial\Omega}\left[f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]dS$

Πότε θα λέμε ότι η f έχει συμπαγή φορέα

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

φορέας = Support $f \subseteq [\alpha,\beta]$.

Εκεί που η f δεν είναι 0, περιέχεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο.

Τα κλειστά διαστήματα είναι συμπαγή.

Κυματική Εξίσωση: $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$

<u>Θεώρημα</u>

Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = f(x,t), \quad x\in\mathbb{R} \quad t>0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= h(x)\end{aligned}\right\} x\in\mathbb{R}$$

έχει το πολύ μια λύση.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις και θέτουμε $w = u_1 - u_2$

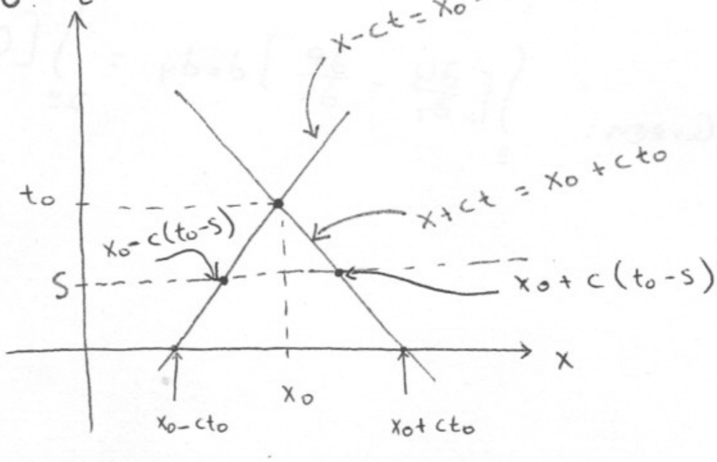
Τότε η w ικανοποιεί το Π.Α.Τ. (Πρόβλημα Αρχικών Τιμών).

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$\left.\begin{aligned} w(x,0) &= 0 \\ w_t(x,0) &= 0\end{aligned}\right\}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

) στόχος είναι να αποδείξουμε ότι $(x_0, t_0)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$

τότε $w(x_0,t_0) = 0$.



$$\boxed{\text{Ενέργεια: } \int \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{c^2}{2} w_x^2 \right) dx}$$

$$E(s) = \int_{x_0 - c(t_0-s)}^{x_0 + c(t_0-s)} \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{c^2}{2} w_x^2 \right) dx \longleftarrow$$

Εκφράζει την ενέργεια σ' αυτό το κομμάτι του κώνου.

(από $x_0 - c(t_0-s)$ έως $x_0 + c(t_0-s)$).

$$\to E(s) = \int_{x_0 - c(t_0-s)}^{x_0 + c(t_0-s)} \left(\frac{1}{2} w_t^2(x,s) + \frac{c^2}{2} w_x^2(x,s) \right) dx.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{f(x)} g(s,x)\, ds \right) = g(f(x),x)\cdot f'(x) + \int_0^{f(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(s,x)$$

$$\to E'(s) = \int_{x_0 - c(t_0-s)}^{x_0 + c(t_0-s)} \left[w_t \cdot w_{tt} + c^2 w_x w_{xt} \right] dx - c\left[\frac{1}{2} w_t^2(x, x_0 + c(t_0-s)) + \frac{c^2}{2} w_x^2(x, x_0 + c(t_0-s)) \right]$$

$$- c\left[\frac{1}{2} w_t^2(x, x_0 - c(t_0-s)) + \frac{c^2}{2} w_x^2(x, x_0 - c(t_0-s)) \right].$$

Παίρνουμε τον όρο: $\displaystyle\int_a^\beta w_x \cdot w_{tx}\, dx = -\int_a^\beta w_{xx} w_t\, dx + (w_x \cdot w_t)\Big|_a^\beta$

τότε $$E'(s) = \int_{x_0 - c(t_0-s)}^{x_0 + c(t_0-s)} [\underbrace{w_{tt} - c^2 w_{xx}}_{=0}] w_t\, dx - c\left[\frac{1}{2} w_t^2(x, x_0 + c(t_0-s)) + \frac{c^2}{2} w_x^2 \right]$$

$$- c\left[\frac{1}{2} w_t^2(x, x_0 - c(t_0-s)) + \frac{c^2}{2} w_x^2(x, x_0 - c(t_0-s)) \right].$$

οπότε $$E'(s) = \underline{c^2 w_x(x, x_0 + c(t_0-s)) \cdot w_t(x, x_0 + c(t_0-s))} - c^2 w_x(x, x_0 - c(t_0-s)) \cdot w_t(x, x_0 - c(t_0-s)) - \underline{\frac{c}{2} w_t^2(x, x_0 + c(t_0-s)) - \frac{c^3}{2} w_x^2(x, x_0 + c(t_0-s))}$$

$$- \frac{c}{2} w_t^2(x, x_0 - c(t_0-s)) - \frac{c^3}{2} w_x^2(x, x_0 - c(t_0-s))$$

$$\left[c^2 w_x^2 (x, x_0 + c(t_0-s)) + w_t^2 (x, x_0 + c(t_0-s)),\right.$$

$$- \frac{c}{2} \left[w_t^2 (x, x_0 - c(t_0-s)) + c^2 w_x^2 (x, x_0 - c(t_0-s)) + 2c\, w_x w_t \right]$$

$$(s) = - \frac{c}{2} \underset{(x,\, x_0+c(t_0-s))}{\left(w_t - c w_x \right)^2} - \frac{c}{2} \underset{(x,\, x_0-c(t_0-s))}{\left(w_t + c w_x \right)^2}$$

$$\leq 0$$

πομένως, $E(s) \leq \underset{\substack{\| \\ 0}}{E(0)}, \quad 0 \leq s \leq t_0$

$\Rightarrow \begin{matrix} w_t = 0 \\ w_x = 0 \end{matrix} \Rightarrow w = 0$, σε όλο τον κώνο εξάρτησης $\overset{\nearrow \text{cone}}{\mathcal{C}}(x_0, t_0)$.

επομένως και στην κορυφή (λόγω συνέχειας

δηλαδή $\underline{w(x_0, t_0) = 0}$

<u>Ενεργειακή Μέθοδος</u>

<u>Χρόνος</u>: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$u_t - k\, u_{xx} = 0$

Στατικό $\longrightarrow \Delta u = 0$

<u>Εξίσωση θερμότητας</u>

$u_t = k u_{xx} + f(x,t), \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, \pi]$ <u>Εξ. θ.</u>

Dirichlet Συνοριακές Συνθήκες $\begin{cases} u(0,t) = h_1(t) \\ u(\pi,t) = h_2(t) \end{cases}, \quad t \geq 0$

<u>Θεώρημα</u>

Το πρόβλημα Εξ. 9 έχει το πολύ μια λύση.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις, τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα.

$$w_t = k \cdot w_{xx} \quad , \quad x \in [0, \pi] \quad , \quad t > 0$$

$$w(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

$$\left.\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ w(\pi, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad t \geq 0$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\, dx$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2\, w \cdot w_t \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} w(x,t) \cdot k \cdot w_{xx}(x,t)\, dx$$

$$= k \int_0^{\pi} w(x,t) \cdot w_{xx}(x,t)\, dx = -k \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\, dx + k \cdot (w \cdot w_x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -k \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\, dx + k\Big(\overset{0}{\cancel{w(\pi,t)}} \cdot w_x(\pi,t) - \overset{0}{\cancel{w(0,t)}} \cdot w_x(0,t)\Big)$$

$$= -k \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\, dx \leq 0$$

Επομένως, $E(t) \leq E(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,0)\, dx = 0$

δηλαδή $w(x,t) \equiv 0 \quad , \quad x \in [0, \pi] \ , \ t > 0.$

<u>Αντίφαση</u> $\overset{\nabla}{\circ}$ $(u_1 = u_2)$

Robin Συνοριακές Συνθήκες: $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta \cdot u = 0$

$\beta \geq 0$

Εξίσωση Παλλόμενης δοκού

$$(*)\quad \begin{cases} u_t + u_{xxxx} = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = h_1(t) \\ u(\pi,t) = h_2(t) \\ u_x(0,t) = h_3(t) \\ u_x(\pi,t) = h_4(t) \end{cases}$$

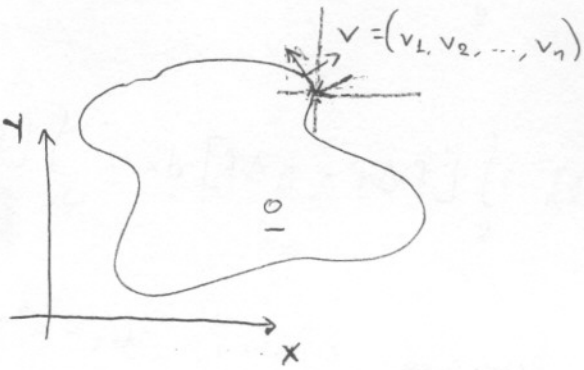
Άσκηση

Με τη μέθοδο της ενέργειας, αποδείξτε ότι το πρόβλημα $(*)$ έχει το πολύ μια λύση.

Πρόοδος 2/5
7-9

13.3.2012

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = -\int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial x_i} g \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot g \, v_i \, ds.$$



$$(x(s), y(s)),$$

$$s \in [0, 1]$$

Εφαπτόμενο: $(x'(s), y'(s))$

κάθετο

$$\frac{(-y'(s), \; x'(s))}{\sqrt{(x'(s))^2 + y'(s)^2}} : \text{μοναδιαίο}$$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} \, ds \qquad , \qquad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} \, ds.$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx\,dy = -\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx\,dy + \underbrace{\int_{\partial\Omega} f \cdot g \left(\frac{-y'}{\cancel{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \right) \cancel{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \, ds}_{-\int_{\partial\Omega} f \cdot g \, \underbrace{y'(s) \, ds}_{dy}}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx\,dy = -\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx\,dy - \int_{\partial\Omega} f \cdot g \, dy$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} g \, dx\,dy = -\int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} dx\,dy + \int_{\partial\Omega} f \cdot g \, dx$$

αυτότητα του Green: $\displaystyle \int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] dx\,dy = \int_{\partial\Omega} [Q \, dx + P \, dy].$

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS$$

2). $\displaystyle\int_{\Omega} [f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f] \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] dS$

Πότε θα λέμε f έχει συμπα

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

φορέας
Support $f \subseteq [a, \beta$

Εκεί που η f δ είναι 0, περ σε ένα συμπαγέ υποσύνολο.

Τα κλειστά διασ είναι συμπαγή

Κυματική Εξίσωση: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

Θεώρημα

πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) \\ u_t(x,0) &= h(x) \end{aligned}\right\} x \in \mathbb{R}$$

έχει το πολύ μια λύση.

Απόδειξη

u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις και θέτουμε $w = u_1 - u_2$

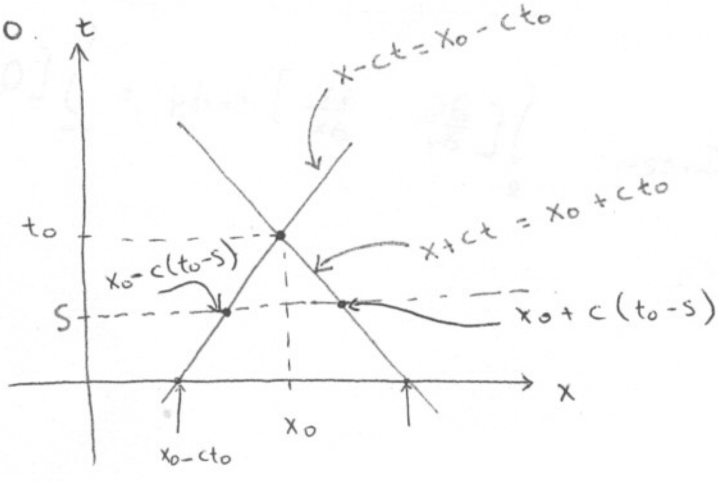
η w ικανοποιεί το Π.Α.Τ. (Πρόβλημα Αρχικών Τιμών)

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

$$\left.\begin{aligned} w(x,0) &= 0 \\ w_t(x,0) &= 0 \end{aligned}\right\} x \in \mathbb{R}.$$

Στόχος είναι να αποδείξουμε ότι $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$

$w(x_0, t_0) = 0$.



$$\boxed{\text{Ενέργεια}: \int \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{c^2}{2} w_x^2 \right) dx}$$

$$E(s) = \int_{x_0 - c(t_0 - s)}^{x_0 + c(t_0 - s)} \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{c^2}{2} w_x^2 \right) dx$$

Εκφράζει την ενέργεια σ' αυ το κομμάτι κώνου.

$$\to E(s) = \int_{x_0 - c(t_0 - s)}^{x_0 + c(t_0 - s)} \left(\frac{1}{2} w_t^2(x,s) + \frac{c^2}{2} w_x^2(x,s) \right) dx.$$

(από $x_0 - c(t_0 - s)$, $x_0 + c(t_0 - s)$)

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{f(x)} g(s,x)\, ds \right) = g(f(x), x) \cdot f'(x) + \int_0^{f(x)} \frac{\partial g}{\partial x}}$$

$$\to E'(s) = \int_{x_0 - c(t_0 - s)}^{x_0 + c(t_0 - s)} \left[w_t \cdot w_{tt} + c^2 w_x w_{xt} \right] dx - $$

$$- c\left[\frac{1}{2} w_t^2\big(x, x_0 + c(t_0 - s)\big) + \frac{c^2}{2} w_x^2\big(x, x_0 + c(t_0 - s)\big) \right]$$

$$- c\left[\frac{1}{2} w_t^2\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big) + \frac{c^2}{2} w_x^2\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big) \right].$$

Παίρνουμε τον όρο : $\int_a^\beta w_x \cdot w_{tx}\, dx = - \int_a^\beta w_{xx} w_t\, dx + (w_x \cdot w_t)\Big|_a^\beta$

ότε $E'(s) = \int_{x_0 - c(t_0 - s)}^{x_0 + c(t_0 - s)} [\underbrace{w_{tt} - c^2 w_{xx}}_{= 0}] w_t\, dx - c\left[\frac{1}{2} w_t^2\big(x, x_0 + c(t_0 - s)\big) + \frac{c^2}{2} w_x^2 \right.$

$$\left. - c\left[\frac{1}{2} w_t^2\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big) + \frac{c^2}{2} w_x^2\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big) \right]. \right.$$

ότε $E'(s) = \underline{c^2 w_x\big(x, x_0 + c(t_0 - s)\big) \cdot w_t\big(x, x_0 + c(t_0 - s)\big)} - c^2 w_x\big(x, x_0 - c(t_0 -$

$\cdot w_t\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big) - \underline{\frac{c}{2} w_t^2\big(x, x_0 + c(t_0 - s)\big)} - \underline{\frac{c^3}{2} w_x^2\big(x, x_0 + c(t_0 -}$

$\frac{c}{2} w_t^2\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big) - \frac{c^3}{2} w_x^2\big(x, x_0 - c(t_0 - s)\big)$

$$= -\frac{c}{2}\left[c^2 w_x^2(x, x_0 + c(t_0 - s)) + w_t^2(x, x_0 + c(t_0-s)) - 2c\, w_x w_t\right]$$

$$-\frac{c}{2}\left[w_t^2(x, x_0 - c(t_0-s)) + c^2 w_x^2(x, x_0 - c(t_0-s)) + 2c\, w_x w_t\right]$$

$$E'(s) = -\frac{c}{2}\underbrace{(w_t - c\,w_x)^2}_{(x,\, x_0 + c(t_0-s))} - \frac{c}{2}\underbrace{(w_t + c\,w_x)^2}_{(x,\, x_0 - c(t_0-s))}$$

$$\leq 0$$

Επομένως, $E(s) \leq \underset{\overset{\parallel}{0}}{E(0)}$, $0 \leq s \leq t_0$

$\Rightarrow$ $w_t = 0$, $w_x = 0$ $\Rightarrow w = 0$, σε όλο τον κώνο εξάρτησης $\overset{\text{cone}}{\mathcal{C}}(x_0, t_0)$.

επομένως και στην κορυφή (λόγω συνέχειας)

δηλαδή $\underline{w(x_0, t_0) = 0}$

Ενεργειακή Μέθοδος

<u>Χρόνος</u>: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$u_t - k\, u_{xx} = 0$

Στατικό $\longrightarrow \Delta u = 0$

Εξίσωση θερμότητας

$u_t = k u_{xx} + f(x,t)$, $x \in [0, \pi]$, $t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in [0, \pi]$ <u>Εξ. θ.</u>

Dirichlet Συνοριακές Συνθήκες $\begin{cases} u(0,t) = h_1(t) \\ u(\pi, t) = h_2(t) \end{cases}$, $t \geq 0$

Θεώρημα

Το πρόβλημα Εξ. 9 έχει το πολύ μια λύση.

Απόδειξη

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις, τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα.

$$w_t = k \cdot w_{xx} \quad , \quad x \in [0, \pi] \quad , \quad t > 0$$

$$w(x,0) = 0 \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w(\pi,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad t \geq 0$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,t)\, dx$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2\, w \cdot w_t \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} w(x,t) \cdot k \cdot w_{xx}(x,t)\, dx$$

$$= k \int_0^{\pi} w(x,t) \cdot w_{xx}(x,t)\, dx = -k \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\, dx + k \cdot (w \cdot w_x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -k \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\, dx + k\left(\cancel{w(\pi,t)}^{\,0} \cdot w_x(\pi,t) - \cancel{w(0,t)}^{\,0} \cdot w_x(0,t)\right)$$

$$= -k \int_0^{\pi} w_x^2(x,t)\, dx \leq 0$$

Επομένως, $E(t) \leq E(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} w^2(x,0)\, dx = 0$

δηλαδή $w(x,t) \equiv 0 \quad , \quad x \in [0,\pi] \; , \; t > 0.$

<u>Αντίφαση</u> ! $(u_1 = u_2)$

Robin Συνοριακές Συνθήκες: $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta \cdot u = 0$

$\beta \geq 0$

Εξίσωση Παλλόμενης δοκού

$$(*)\quad \begin{cases} u_t + u_{xxxx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = h_1(t) \\ u(\pi,t) = h_2(t) \\ u_x(0,t) = h_3(t) \\ u_x(\pi,t) = h_4(t). \end{cases}$$

Άσκηση

Με τη μέθοδο της ενέργειας, αποδείξτε ότι το πρόβλημα $(*)$ έχει το πολύ μια λύση.

15.3.2012

Άσκηση 2.27

$$u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0 \quad , \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \quad , \ x \in \mathbb{R}$$

μη ομογενή $\Rightarrow$ $u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = f$

Κάνω Green και βρίσκω κατ' ευθείαν τη λύση.

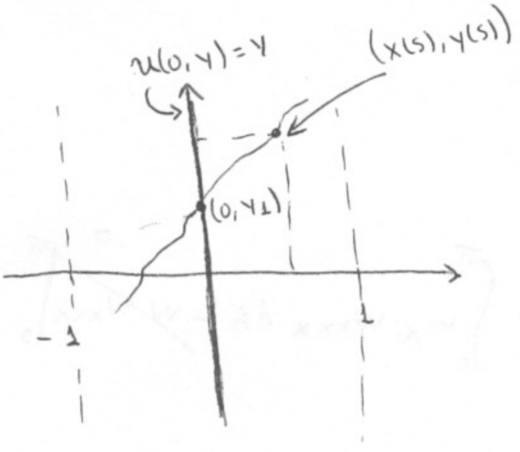
Άσκηση 1 / Φυλλάδιο 2

$$\sqrt{1-x^2} \cdot u_x + u_y = 0 \quad , \quad x \in (-1,1) \ , \ y \in \mathbb{R}$$

$$u(0,y) = y$$

$$\frac{d}{ds} u(x(s), y(s)) = u_x \cdot x'(s) + u_y \cdot y'(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} x'(s) = \sqrt{1-x^2(s)} \\ y'(s) = 1 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = y_1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad y(s) = s + y_1 \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l} x'(s) = \sqrt{1+x^2(s)} \\ x(0) = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow$$



$$\frac{x'(s)}{\sqrt{1+x^2(s)}} = 1 \quad \text{άρα} \quad x \nearrow$$

$$\xrightarrow{\text{ολοκληρ.}} \int_0^s \frac{x'(\tau)}{\sqrt{1+x^2(\tau)}} \, d\tau = \int_0^1 1 \, d\tau$$

$$\xrightarrow{dz = x'(\tau)d\tau} \int_0^{x(s)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = s$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x(s)} \left(\sin^{-1} z\right)' dz = s$$

$$\Leftrightarrow \sin^{-1}(x(s)) = s \,, \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\sin^{-1}(x(s))) = \sin s$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(s) = \sin s}$$

<u>Παλλόμενη δοκός</u>

$$u_t + u_{xxxx} = f(x,t) \,, \quad 0<x<\pi \,, \quad t>0$$

$$u(x,0) = g(x)$$

$$\Sigma.\Sigma \begin{cases} u(0,t) = h_1(t) \\ u(\pi,t) = h_2(t) \\ u_x(0,t) = h_3(t) \\ u_x(\pi,t) = h_4(t) \end{cases}$$

Το πρόβλημα έχει το <u>πολύ μια</u> λύση.

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμμένες λύσεις και $w = u_1 - u_2$.

Τότε η w λύνει την αντίστοιχη ομογενή.

$$w_t + w_{xxxx} = 0 \,, \quad 0 < x < \pi \,, \quad t>0$$

$$A.\Sigma \to w(x,0) = 0$$

$$\Sigma.\Sigma \begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

$$\to \mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx$$

$$\mathcal{E}_1'(t) = \int_0^\pi w \cdot w_t \,dx = -\int_0^\pi w \cdot w_{xxxx}\,dx = \int_0^\pi w_x \cdot w_{xxx}\,dx \cancel{- w\, w_{xxx}\Big|_0^\pi}^{\,0}$$

$$= -\int_0^\pi w_{xx}^2\,dx + w_x \cdot w_{xx}\Big|_0^\pi$$

$$\mathcal{E}_1'(t) \le 0 \implies \mathcal{E}(t) \le \cancel{\mathcal{E}(0)}^{0}, \quad t>0$$

$$\implies \mathcal{E}(t) \le 0 \implies w(x,t) \equiv 0, \quad 0 \le x \le \pi, \ t>0$$

→ Άλλη ενέργεια

$$\mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi w_x^2(x,t)\,dx$$

$$\mathcal{E}_2'(t) = \int_0^\pi w_x \cdot w_{xt}\,dx = -\int_0^\pi w_{xx}\cdot w_t\,dx + \cancel{w_x \cdot w_t}^{0}\Big|_0^\pi$$

$$= \int_0^\pi w_{xx}\cdot w_{xxxx}\,dx = -\int_0^\pi w_{xxx}^2\,dx + \underline{w_{xx}\cdot w_{xxx}\Big|_0^\pi}$$

άρα η $\mathcal{E}_2$ όχι ενέργεια.

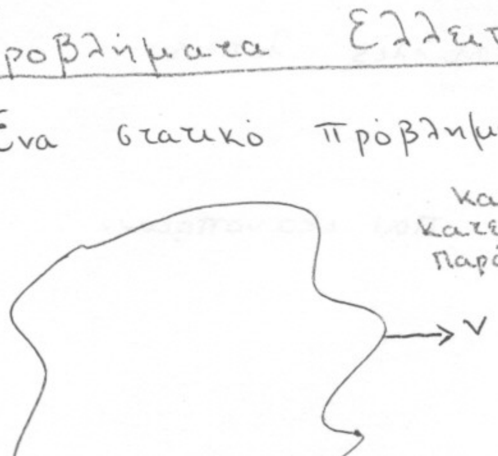
→ $$\mathcal{E}_3(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi w_{xx}^2$$

$$\mathcal{E}_3'(t) = \int_0^\pi w_{xx}\cdot w_{xxt}\,dx = -\int_0^\pi w_{xxx}\,w_{xt} + w_{xx}\cdot w_{xt}\Big|_0^\pi$$

$$= -\int_0^\pi w_{xxxx}\,w_t dx - \cancel{w_{xxx}\cdot w_t}^{0}\Big|_0^\pi = -\int_0^\pi w_{xxxx}^2\,dx$$

Προβλήματα Ελλειπτικού τύπου

Ένα στατικό πρόβλημα: $-\Delta u = f$, $x \in \underline{\Omega}$



κατά κατεύθυνση παράγωγος → $\dfrac{du}{d\nu} + \beta u = g$, $x \in \partial\underline{\Omega}$

$\beta \ge 0$, $\beta \not\equiv 0$ $\partial\underline{\Omega}$

$\underline{\Omega}$ φραγμένο χωρίο, συνεκτικό

Το πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση.

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμμένες λύσεις και $w = u_1 - u_2$.

Τότε η w λύνει το
$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta w = 0 , & x \in \Omega \\ \dfrac{dw}{d\nu} + \beta w = 0 , & x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

<u>1η ταυτότητα:</u> $\displaystyle\int v \cdot \Delta u \, dx = -\int_{\Omega} \nabla v \, \nabla u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{du}{d\nu} \, ds$

στο πρόβλημά μας:

$$\int_{\Omega} \left[-w \Delta w \right] dx = 0 \iff \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\partial\Omega} w \frac{dw}{d\nu} ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \beta w^2 ds = 0$$

άρα $\nabla w = 0 , \; x \in \Omega$ $\Rightarrow w(x) = c$, αφού $\boxed{\Omega \text{ συνεκτικό}}$

$\beta w = 0 , \; x \in \partial\Omega$

(δυο σημεία μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή ∥ στους άξονες)

στο σύνορο θα πάρω την τιμή c, άρα αν $c \neq 0$

$c\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \; \partial\Omega$, <u>Άτοπο</u>

- Αν θέταμε το $\left. \begin{array}{l} -\Delta u = 0 , \; \Omega \\ \dfrac{du}{d\nu} = 0 , \; \partial\Omega \end{array} \right|$ έχει πολλές λύσεις

Πρέπει να ψάξω για σταθερές λύσεις που ικανοποιούν το $\Delta u = 0$

$$\frac{du}{d\nu} = \nabla u \cdot \nu = 0 .$$

20.3.2012

Εξίσωση θερμότητας

$$u_t = k \cdot u_{xx} \quad , \; x \in \mathbb{R} \quad t>0 \qquad (*)$$

$(k>0)$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

Αν u είναι λύση της $(*)$, τότε υπάρχουν κι άλλες λύσεις που προκύπτουν από τη u.

$u + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύση

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u$ $\Rightarrow$ λύνει το πρόβλημα

$\forall u, v$ λύσεις $\Rightarrow$ $u+v$ είναι λύση

είναι αποτέλεσμα της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή.

Τελεστής: $L : A \to A$

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

$$L(\lambda u) = \lambda \cdot L(u)$$

$L(u) = u_t - k \cdot u_{xx}$

διαφορικός τελεστής

$f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (αυτόνομη)

$$t \longmapsto f(t)$$

$$t \longmapsto f(t+1)$$

αν f λύση, τότε και η $f(t+c)$ είναι επίσης λύση.

Συμμετρίες του διαφορικού τελεστή

Αν $u(x,t)$ λύση, τότε:

1). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x+\alpha, t+\beta)$ είναι επίσης λύση της διαφορικής εξίσωσης.

2). Η $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ είναι επίσης λύση.

$$v(x,t) = u(\lambda x, \mu t) = u(y,s)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \lambda x \\ s = \mu t \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{y}{\lambda} \\ t = \frac{s}{\mu} \end{array}$$

$$u_s(y,s) = u_t(x,t)\frac{\partial t}{\partial s} + u_x(x,t)\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\mu} u_t$$

$$u_y(y,s) = u_t(x,t)\frac{\partial t}{\partial y} + u_x(x,t)\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\lambda} u_x$$

$$\Rightarrow u_{yy} = \frac{1}{\lambda^2} u_{xx}$$

$$u_s(y,s) = k \cdot u_{yy}(y,s)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} u_t(x,t) = k \cdot \frac{1}{\lambda^2} u_{xx}(x,t) \Rightarrow u_t = \frac{\mu}{\lambda^2} k \cdot u_{xx}$$

αν $\mu = \lambda^2$ τότε έχουμε καινούρια λύση.

$u_t = u_{xxx}$, $x \in \mathbb{R}$ $t > 0$

$\Downarrow$

$u(\lambda x, \lambda^3 t)$ είναι επίσης λύση.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Πρόβλημα Cauchy)

Λύνουμε πρώτα το: $\begin{cases} u_t = u_{xx} \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \delta_0 \end{cases}$

όπου $\delta_0(x) = 0 \ , \ x \neq 0$ (συναρτησοειδές)

και $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\, dx = 1$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t)\, dx$$

$$= \left(u_x(x,t)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda x, \lambda^2 t)\, dx = 1$$

Η λύση που ψάχνουμε είναι στη μορφή:

$$v(x,t) = \frac{1}{t^{\beta/2}} \cdot g\left(\frac{x^2}{t}\right)$$

$$v(x,t) = \lambda^{\beta} \cdot u(\lambda x, \lambda^2 t) = \underline{\lambda^{\beta} u\left(1, \frac{t}{x^2}\right)}$$

$$\lambda t = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{t}$$

ή για:

$$\lambda^2 t = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$v(x,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\beta} \cdot u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{\beta} u(\lambda x, \lambda^2 t)\, dx = 1$$

$$y = \lambda x \Rightarrow dy = \lambda \cdot dx$$

$$\lambda^{\beta-1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u(y,s)\, dy}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^{\beta-1} = 1 \iff \underline{\beta = 1}, \quad \text{τότε} \quad \lambda \cdot u(\lambda x, \lambda^2 t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

άρα $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, g\left(\dfrac{x^2}{t}\right)$, $\underline{\dfrac{x^2}{t} = \xi}$.

όπου,

$$\lim_{\xi \to +\infty} g(\xi) = 0, \quad \text{με} \quad g(0) > 0.$$

$$u_t = -\frac{1}{2} t^{-3/2} g(\xi) - x^2 t^{-5/2} g'(\xi)$$

$$u_x = 2\frac{x}{t^{3/2}} g'(\xi), \quad u_{xx} = \frac{2}{t^{3/2}} g'(\xi) + 4\frac{x^2}{t^{5/2}} g''(\xi)$$

$$= \frac{2}{t^{3/2}}\left[g'(\xi) + 2\xi g''(\xi) \right].$$

$$\underline{u_t = u_{xx}} \Rightarrow -\frac{1}{2} t^{-3/2} g(\xi) - \frac{1}{t^{3/2}} g'(\xi)\cdot\xi = \frac{2}{t^{3/2}}\left[g'(\xi) + 2\xi g''(\xi)\right].$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} g(\xi) - \xi g'(\xi) = 2g'(\xi) - 4\xi g''(\xi)$$

$$\Rightarrow g(\xi) + 2\xi g'(\xi) + 4g'(\xi) + 8\xi g''(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(\xi) + 4g'(\xi)}_{Q} + 2\xi\underbrace{\left(g'(\xi) + 4g''(\xi)\right)}_{Q'} = 0$$

$$\Rightarrow Q(\xi) + 2\xi Q'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{Q'(\xi)}{Q(\xi)} + \frac{1}{2\xi} = 0$$

$$\Rightarrow \ln Q(\xi) + \frac{1}{2}\ln \xi = c$$

$$\Rightarrow \xi^{1/2} \cdot Q(\xi) = c$$

$$\Rightarrow Q(\xi) = c \cdot \xi^{-1/2}$$

Επομένως, $4g'(\xi) + g(\xi) = c \cdot \xi^{-1/2}$

$$\Rightarrow g'(\xi) + \frac{1}{4} g(\xi) = \frac{c}{4} \cdot \xi^{-1/2}$$

$$\Rightarrow e^{\xi/4} g'(\xi) + \frac{1}{4} e^{\xi/4} g(\xi) = \frac{c}{4} e^{\xi/4} \cdot \xi^{-1/2}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{\xi/4} g(\xi)\right) = \frac{c}{4} \frac{d}{d\xi}\left(\int_0^{\xi} e^{s/4} \cdot s^{-1/2}\, ds\right)$$

$$\Rightarrow e^{\xi/4} \cdot g(\xi) = \frac{c_1}{4} \int_0^{\xi} e^{s/4} \cdot s^{-1/2}\, ds + c_2$$

$$\Rightarrow g(\xi) = \underbrace{\frac{c_1}{4} e^{-\xi/4} \int_0^{\xi} e^{s/4} \cdot s^{-1/2}\, ds}_{=0} + c_2 \cdot e^{-\xi/4}$$

$\left(4g'(\xi) + g(\xi) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0\right).$

$$\Rightarrow g(\xi) = c_2 \cdot e^{-\xi/4}$$

θέλουμε όμως, $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\, dx = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx = 1.$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{t^{1/2}} \int_0^{+\infty} c_2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx = 1$$

θέτω:

$x = 2\sqrt{t}\, y$

$dx = 2\sqrt{t}\, dy$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\cancel{t^{1/2}}} \int_0^{+\infty} c_2 \cdot e^{-y^2}\, 2\cancel{\sqrt{t}}\, dy = 1$$

$$\Leftrightarrow c_2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{4}.$$

$\Leftrightarrow \quad c_2 \cdot \frac{\;}{2} = \frac{\;}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{c_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}}$$

άρα $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\xi^2/4} \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

δηλαδή, $\underline{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}}$

Η λύση για το πρόβλημα $\left|\begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right.$

είναι η: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cdot f(y)\, dy.}$

Αν θέλουμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x>0 \quad t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

Παίρνουμε Dirichlet περιττή επέκταση:

$$f_\pi(x) = \begin{cases} f(x) \\ \\ -f(-x) \end{cases}$$

λύση μας θα είναι: $V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f_\pi(y)\, dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy \right] = \ldots$$

22.3.2012

Εξίσωση θερμότητας

$u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$ $t>0$

$u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy$

Πρώτα λύσαμε: $u_t = u_{xx}$

$u(x,0) = \delta_y \rightarrow$ μάζα Dirac

Λύση: $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$

μετά ολοκληρώσαμε: $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy$

Αντίστοιχο μη ομογενές πρόβλημα

Να λυθεί το πρόβλημα $u_t = u_{xx} + f(x,t)$

$u(x,0) = 0$ (*)

Αρχικό: $u_t = u_{xx} + \delta_{(x_0,t_0)} \longrightarrow$ μάζα τοποθετημένη αρχικά στο $(0,0)$.

$u(x,0) = 0$ Τώρα τη θέλω στο (y,s).

άρα στο (y,s): $\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}$

Άρα λύση στο (*) είναι: $u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(y,s) \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} dy\, ds$

Εξίσωση θερμότητας στις 2 μεταβλητές

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; , \; t>0 \qquad u = u(x,y,t)$$

$$u(x,y) = f(x,y)$$

$$\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$$

λύση : $u(x,y,t) = \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi t})^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-\beta)^2}{4t}} \cdot f(a,\beta)\, da\, d\beta$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{2/2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy \qquad \left(\begin{array}{c} |x|^2 = x^2 + y^2 \\ x = (x,y) \end{array} \right)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{2/2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy$$

στη
μια διάσταση

Κυματική Εξίσωση θερμότητας σε Άφρακτα Χωρία

Μέθοδος του Fourier

(μέθοδος των χωριζομένων μεταβλητών).

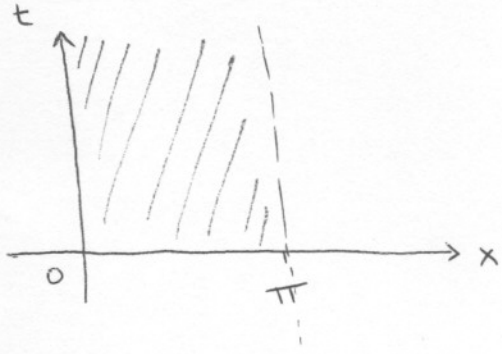
Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & , \; 0 < x < \pi \; , \; t>0 \\ u(x,0) = f(x) & , \; 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \\ u(\pi,t) = 0 & \end{cases}$$

<u>Στόχος</u>: Να βρούμε "πολλές" λύσεις του

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$



Τις λύσεις τις ψάχνουμε στη μορφή

$$u(x,t) = \underbrace{X(x) \cdot T(t)}$$

χωρική · χρονική μεταβλητή

$$u(0,t) = 0 \iff X(0) \cdot T(t) = 0$$

η χωρική είναι μηδέν, γιατί αν ήταν η χρονική θα είχα παντού μόνο τη λύση τη μηδενική.

άρα $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$X(0) = 0$$

$$X(\pi) = 0$$

Πρέπει επίσης να λύνει την εξίσωση

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$u_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$$

$$u_x(x,t) = X'(x) \cdot T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x) \cdot T(t)$$

και $u_t = u_{xx} \iff X(x)\cdot T'(t) = X''(x)\cdot T(t)$

$$\iff \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad , \forall\, t>0,\ \forall\, 0<x<\pi$$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

$$\text{και} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$? $\quad X''(x) = \lambda \cdot X(x) = 0 \quad , \ 0<x<\pi$

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

<u>Χαρακτηριστική Εξίσωση</u>: $\rho^2 - \lambda = 0$

<u>$\lambda = 0$</u>: $\quad X''(x) = 0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2$ τ.ω $X(x) = c_1 x + c_2$

όμως $X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

άρα το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος.

<u>$\lambda > 0$</u>: $\quad \rho^2 = \lambda \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$X(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad , \ 0<x<\pi$$

όμως θέλουμε $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$$\left. X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \right| \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\dots) = e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\left(1 - e^{2\sqrt{\lambda}\pi}\right) \neq 0 \quad , \lambda > 0$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$, πάλι δε μου κάνει

άρα $\lambda < 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda(-1) \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}\,i$

$$\Rightarrow e^{\pm\sqrt{-\lambda}i\,x} = \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \pm i\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2$ τ.ω $X(x) = c_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

όμως πρέπει $X(0)=0$ και $X(\pi)=0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow c_1 \cdot + 0\cdot c_2 = 0 \\ &c_1\cos(\sqrt{-\lambda}\,\pi) + c_2\sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow c_1 = 0$$

Πρέπει να επιλέξω $\sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0$

άρα $\sqrt{-\lambda}\,\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$

$k = \sqrt{-\lambda}$

$\underbrace{k^2 = -\lambda}_{\text{ιδιοτιμή}}$, $\underbrace{X_k(x) = \sin(kx)}_{\text{ιδιοσυνάρτηση}}$, $k \in \mathbb{N}$

τώρα $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{T'(t)}{T_k(t)} = -k^2 \Leftrightarrow$

$$\ln T_k(t) = -k^2 t + c \Leftrightarrow T_k(t) = e^{-k^2 t}$$

$u_t = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$

λύσεις: $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = e^{-k^2 t}\sin kx$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, $k \in \mathbb{N}$

Η γενικότερη λύση έχει τη μορφή

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

όπου c_k, $k \in \mathbb{N}$ θα επιλεγούν κατάλληλα.

<u>Ερώτημα</u> $\exists\, c_k$ ώστε $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,\pi]$?

για να συμβαίνει αυτό θα έπρεπε

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) = f(x) \quad , \quad x \in [0,\pi]$$

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx \overset{m \neq k}{=\!=} 0 \quad \rightarrow \text{ ορθογωνιότητα ιδιοσυναρτήσεων}$$

Ενώ,

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\cdot\sin(mx)\,dx \overset{m=k}{=\!=} \int_0^{\pi} \sin^2(kx)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2}\,dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\cancel{\int_0^{\pi} \cos 2kx\,dx}^{\,0}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Επομένως, $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \delta_{k,m}\frac{\pi}{2}$

$m \in \mathbb{N}$: $\displaystyle f(x)\cdot\sin(mx) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)\cdot\sin(mx)$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx$$

$$= c_m \int_0^{\pi} \sin^2(mx)\,dx$$

$$= c_m \frac{\pi}{2}$$

$$C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sin(kx)\, dx \quad , \quad k\in\mathbb{N}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-k^2 t}$$

Ασκηση

Να λυθεί η εξίσωση θερμότητας

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad x>0 \quad t>0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad x>0$$

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t>0$$

θα βρούμε λύσεις της μορφής $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$X(0)=0$

Η διαφορική εξίσωση είναι: $X(x)\cdot T'(t) = X''(x)\cdot T(t)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad , \quad 0<x$$

$$X(0)=0$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$\underline{\lambda=0}$, $\left.\begin{array}{l} X(x) = c_1 x + c_2 \\ X(0)=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad X(x) = c_1 x$

$\underline{\lambda<0}$, $\left.\begin{array}{l} X(x) = c_1\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \\ X(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-c_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad X(x) = c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\, x} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}\right)$

Απορρίπτεται γιατί είναι άφρακτη (αν στείλουμε το x στο $+\infty$, απειρίζεται)

$\underline{\lambda>0}$, $\quad X(x) = c_1 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$
$\quad X(0) = 0 \iff c_2 = 0$
$\iff \quad X_\lambda(x) = \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$

οπότε $\quad u_\lambda(x,t) = e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$.

$\underline{\lambda>0}$

$e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$

γενική λύση: $\quad u(x,t) = \int_0^\infty c(\lambda) \cdot e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)\, d\lambda.$

για να αισθάνεται τα αρχικά δεδομένα, η συνάρτηση c να προσδιοριστεί ώστε: $u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = \int_0^\infty c(\lambda) \cdot \sin(\lambda x)\, d\lambda$$

(Όταν έχω διακριτό "κ" βάζω άθροισμα ενώ σε συνεχές βάζω ολοκλήρωμα.)

$$\sin(mx)\, f(x) = \sin(mx) \int_0^\infty c(\lambda) \sin(\lambda x)\, d\lambda$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \sin(mx)\, f(x)\, dx = \int_0^\infty \sin(mx) \int_0^\infty c(\lambda) \sin(\lambda x)\, d\lambda\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \sin(mx)\, f(x)\, dx = \int_0^\infty c(\lambda) \int_0^\infty \sin(\lambda x) \sin(mx)\, dx$$

αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί.

27.3.2012

Κυματική Εξίσωση

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < 2\pi \quad , \quad t>0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = u(2\pi, t) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) \end{array}\right\} , \quad t>0$$

Στο τέλος, θα βάλουμε τα αρχικά δεδομένα.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array}\right\} , \quad 0 < x < 2\pi$$

περιοδική συνάρτηση
$f : \mathbb{R}$ με περίοδο 2π
$\hookrightarrow f(x+2\pi) = f(x)$

$f(0) = f(2\pi)$

$f'(0) = f'(2\pi)$.

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) \cdot T''(t) - c^2 X''(x) \cdot T(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

Πάντοτε θα θέτουμε:

$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$. $\quad X(0) = X(2\pi)$, $\quad X'(0) = X'(2\pi)$

τότε:

$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$

$u(0,t) = u(2\pi, t)$

$\Leftrightarrow X(0) \cdot T(t) = X(2\pi) \cdot X(t)$

$\Leftrightarrow (X(0) - X(2\pi)) X(t) = 0$

$u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) \Leftrightarrow$

$X'(0) \cdot X'(t) = X'(2\pi) \cdot X'(t) \Leftrightarrow$

$(X'(0) - X'(2\pi)) X'(t) = 0$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$\rho^2 + \lambda = 0 \longleftarrow \text{Χαρακτηριστική Εξίσωση}$$

i) $\underline{\lambda = 0} \Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ώστε $X(x) = c_1 \cdot x + c_2$.

$$\left.\begin{array}{l} X(0) = X(2\pi) \\ X'(0) = X'(2\pi) \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad \underline{c_1 = 0}$$

Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή της εξίσωσης

$X_0(x) = 1$.

ii) $\underline{\lambda < 0} \Rightarrow \rho^2 = -\lambda \Leftrightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda}$

$$e^{\sqrt{-\lambda}\, x}, \quad e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$X(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

$\underline{X(0) = X(2\pi)} \iff c_1 + c_2 = c_1 \cdot e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} + c_2\, e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$

$$\iff c_1\left(e^{2\pi\sqrt{\lambda}} - 1\right) + c_2\left(e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}} - 1\right) = 0 \quad (1)$$

και

$\underline{X'(0) = X'(2\pi)} \iff c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda}\cdot e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}\, c_1 - \sqrt{-\lambda}\, e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}} \cdot c_2$

$$\iff c_1 - c_2 = c_1 \cdot e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} - c_2\, e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$$

$$\iff c_1\left(e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} - 1\right) + c_2\left(1 - e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \quad (2)$$

Από (1) & (2) $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$

iii). $\underline{\lambda > 0} \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow \overset{\text{πραγματικό}}{\cos(\sqrt{\lambda}\, x)}, \overset{\text{φανταστικό}}{\sin(\sqrt{\lambda}\, x)}$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$\underline{X(0) = X(2\pi)} \iff c_1 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, 2\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)$.

$$\iff c_1\left(\cos(\sqrt{\lambda}\, 2\pi) - 1\right) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0 \quad (1)$$

$\underline{X'(0) = X'(2\pi)} \iff -c_1\sqrt{\lambda}\cdot 0 + c_2\sqrt{\lambda} = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + \sqrt{\lambda}\cdot c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)$

$$\iff -c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + c_2\left(\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1\right) = 0 \quad (2)$$

Από (1) & (2) $\Rightarrow \overset{A}{\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1 & \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) \\ \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

αναγκαστικά, θα πρέπει $\det A = 0 \iff$

$$\left(\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1\right)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0$$

$$\iff \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 1 \quad \text{και} \quad \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0$$

$$\iff \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = \cos(2k\pi)$$

$$\sqrt{\lambda}\cdot \cancel{2\pi} = \cancel{2}k\cancel{\pi}$$

$$\underline{\lambda_k = k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ιδιοτιμή

Έχουμε δυο ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις για την ιδιοτιμή $\lambda_k = k^2$, τις: $\cos kx$, $\sin kx$.

οπότε $X_k(x) = \delta_k \cos kx + c_k \sin kx$.

Τώρα θα λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα του χρόνου.

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

i). $\lambda_0 = 0 \Rightarrow T''(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = c_1 \cdot t + c_2$

ii). $\frac{1}{c^2}\frac{T_k''(t)}{T_k(t)} = -k^2 \iff T_k''(t) + (kc)^2 T_k(t) = 0$

$$T_k(t) = \cos(kct)$$

$$\sin(kct).$$

οπότε,

$$T_k(t) = \left(a_k \cdot \cos(kct) + \beta_k \sin(kct)\right).$$

Επομένως,

$$u_0(x,t) = a_0 t + \beta_0$$

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos(kct) + \beta_k \sin(kct)\right)\left(\delta_k \cos kx + c_k \sin kx\right)$$

για $k = 1, 2, \dots$

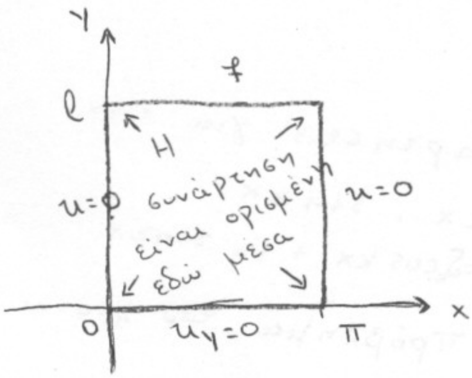
Η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$u(x,t) = a_0 t + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(kct) + \beta_k \cdot \sin(kct)\right)\left(\delta_k \cos kx + c_k \cdot \sin kx\right)$$

Εξίσωση του Laplace

(Αρμονικές Συναρτήσεις)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < \ell$$



$u(0,y) = 0 \quad , \quad 0 < y < \ell$

$u_y(x,0) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi$

$u(\pi,y) = 0 \quad , \quad 0 < y < \ell$

Στο τέλος, βάζουμε την:

$u(x,\ell) = f(x)$.

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

$$u_{xx}(x,y) = X''(x) \cdot Y(y)$$

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < \ell.$$

$X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) \cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \right).$

$X(\pi) = 0$

$Y'(0) = 0$

Θέτουμε, $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_k = k^2 \\ X_k(x) = \sin(kx) \end{array}, \quad 0 < x < \pi$$

και

$$\left.\begin{array}{l} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y'(0) = 0 \end{array} \quad , 0 < y < \ell \right|$$

$$Y''_k(y) - k^2 Y_k(y) = 0$$

$$e^{ky}, \quad e^{-ky}$$

$$Y_k(y) = c_1 \cdot e^{ky} + c_2 e^{-ky} \Rightarrow Y_k(y) = c \cdot (e^{ky} + e^{-ky})$$

$$Y'_k(y) = k \cdot c_1 e^{ky} - k c_2 e^{-ky}$$

$$Y'_k(0) = 0 \Leftrightarrow k(c_1 - c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

Επομένως, $u_k(x,y) = \sin(kx)\left(e^{ky} + e^{-ky}\right)$

Η γενική λύση θα είναι:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(kx)\left(e^{ky} + e^{-ky}\right)$$

Τώρα έχουμε την απαίτηση $\underline{u(x,\ell) = f(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(e^{k\ell} + e^{-k\ell}\right) \sin(kx)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{c_k\left(e^{k\ell} + e^{-k\ell}\right)}_{\bar{c}_k} \cdot \sin(kx) \qquad \left(\int_0^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx)\, dx = \frac{\pi}{2} \delta_{km}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin(mx) f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \bar{c}_m \Rightarrow \bar{c}_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(mx) f(x)\, dx$$

$$c_k = \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx}{e^{kl}+e^{-kl}}$$

Επομένως,

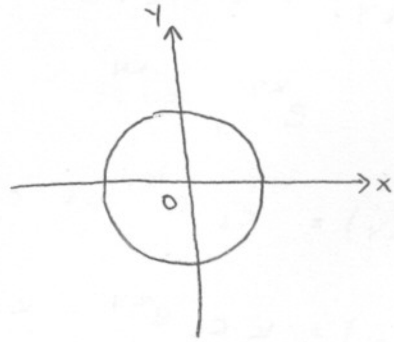
$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(kx)\,dx}{e^{kl}+e^{-kl}} \cdot \left(e^{ky}+e^{-ky}\right)\sin(kx).$$

Πρόβλημα

Να βρεθεί η αρμονική συνάρτηση

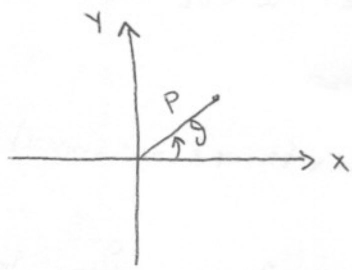
$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad , \quad x^2+y^2=1$$



Θα κάνουμε αλλαγή σε πολικές συν/νες.

$$x = \rho\cos\theta \,, \quad y = \rho\sin\theta$$



$$u(x,y) = U(\rho,\theta)$$

$$u_x = \frac{\partial U}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow (1+\tan^2\theta)\,\theta_x = -\frac{y}{x^2}$$

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\theta_x = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}$$

οπότε, $u_x = U_\rho \cdot \frac{x}{\rho} - U_\theta \cdot \frac{y}{\rho^2}$

$$u_{xx} = U_\rho \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} \right) + \frac{x}{\rho}\left[U_{\rho\rho} \frac{x}{\rho} - U_{\rho\theta} \frac{y}{\rho^2} \right]$$

$$+ 2U_\theta \frac{yx}{\rho^4} - \frac{y}{\rho^2}\left[U_{\theta\rho} \frac{x}{\rho} - U_{\theta\theta} \frac{y}{\rho^2} \right]$$

$$u_y = U_\rho \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = U_\rho \cdot \frac{y}{\rho} + \frac{x}{\rho^2} U_\theta$$

$$u_{yy} = U_\rho \left(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3} \right) + \frac{y}{\rho}\left[U_{\rho\rho} \frac{y}{\rho} + U_{\rho\theta} \frac{y}{\rho^2} \right]$$

$$- \frac{xy}{\rho^4} U_\theta + \frac{x}{\rho^2}\left[U_{\theta\rho} \frac{y}{\rho} + U_{\theta\theta} \frac{x}{\rho^2} \right]$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \iff$

$$\boxed{U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_\rho + \frac{1}{\rho^2} U_{\theta\theta} = 0.}$$ ← Λαπλασιανή σε πολικές συν/νες

29.3.2012

Αρμονική

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad , \quad x^2+y^2=1$$

Μετατρέπω την αρχική σε πολικές συν/νες

$u(x,y) = U(\rho,\vartheta)$ $\left(\rho=\sqrt{x^2+y^2} \; , \; \begin{array}{l} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{array}\right)$

και έχω

$$U_{\rho\rho}(\rho,\vartheta) + \frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\vartheta) + \frac{1}{\rho^2}U_{\vartheta\vartheta}(\rho,\vartheta) = 0 \quad , \; \begin{array}{l}\rho\in(0,1) \\ \vartheta\in(0,2\pi)\end{array}$$

με $U(1,\vartheta) = g(\vartheta)$, $0\le\vartheta\le 2\pi$

Εδώ ψάχνω λύσεις στη μορφή $U(\rho,\vartheta) = A(\rho)\cdot B(\vartheta)$ (συνάρτηση του ρ $\cdot$ συνάρτηση του ϑ) και η διαφορική γίνεται: $A''(\rho)\cdot B(\vartheta) + \frac{1}{\rho}A'(\rho)B(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2}A(\rho)B''(\vartheta) = 0$

$$\Rightarrow \rho^2\frac{A''(\rho)}{A(\rho)} + \rho\frac{A'(\rho)}{A(\rho)} + \frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)} = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2\frac{A''(\rho)}{A(\rho)} + \rho\frac{A'(\rho)}{A(\rho)} = -\frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)}$$

άρα $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}$: $\left|\begin{array}{l} \frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)} = -\lambda \\ B(0) = B(2\pi) \\ B'(0) = B'(2\pi) \end{array}\right.$, $\vartheta\in(0,2\pi)$

και $\rho^2 \frac{A''(\rho)}{A(\rho)} + \rho \frac{A'(\rho)}{A(\rho)} = \lambda$

$\Rightarrow \rho^2 A''(\rho) + \rho A'(\rho) - \lambda A(\rho) = 0$

οπότε λύνω το $\frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)} = -\lambda \Rightarrow \left| \begin{array}{l} B''(\vartheta) + \lambda B(\vartheta) = 0 \\ B(0) = B(2\pi) \\ B'(0) = B'(2\pi) \end{array} \right.$

<u>για $\lambda_0 = 0$</u> : $B(\vartheta) = 1$

<u>$\lambda_k = k^2$</u> : $\sin k\vartheta$, $\cos k\vartheta$, $k \in \mathbb{N}$

ώρα λύνω το $\rho^2 A''(\rho) + \rho A'(\rho) - \lambda A(\rho) = 0$:

<u>για $\lambda_0 = 0$</u>: $\rho^2 A''(\rho) + \rho A'(\rho) = 0$

$\Rightarrow \rho A''(\rho) + A'(\rho) = 0$

$\Rightarrow \left(\rho A'(\rho)\right)' = 0$

$\Rightarrow \rho A'(\rho) = \text{σταθερό} = c$

$\Rightarrow A'(\rho) = \frac{c}{\rho}$

$\Rightarrow \boxed{A(\rho) = c_1 \log\rho + c_2}$

,s $\lim_{\rho \to 0} \log\rho = -\infty$ άρα $c_1 = 0$

οπότε $A(\rho) = c_2$ και έστω $A(\rho) = 1$

για $\lambda_k = k^2$: $\boxed{\rho^2 A''_k(\rho) + \rho A'_k(\rho) - k^2 A_k(\rho) = 0}$

γραμμική $2^{ης}$ τάξης με όχι σταθερούς συντελεστές

Είναι όμως η διαφορική εξίσωση του Euler και ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή $A(\rho) = \rho^m$

$A'(\rho) = m \cdot \rho^{m-1}$

$A''(\rho) = m(m-1)\rho^{m-2}$ και παίρνουμε

$m>0$

$$\left(\begin{array}{l} \rho(\rho^m)' = m\rho^m \\ \rho^2(\rho^m)'' = m(m-1)\rho^m \end{array}\right)$$

$$m(m-1)\rho^m + m\rho^m - k^2\rho^m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m(m-1) + m - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = k \;\; \text{ή} \;\; m = -k$$

άρα $\rho^2 A''_k(\rho) + \rho A'_k(\rho) - k^2 A_k(\rho) = 0$

οι δυο λύσεις είναι οι $\rho^k, \boxed{\rho^{-k}}$

απορρίπτεται γιατί το χωρίο περιέχει το 0, άρα είναι άφρακτη.

άρα

$$k^2 \to \rho^k\left(a_k \cos(k\vartheta) + \beta_k \sin(k\vartheta)\right)$$

οπότε $$U(\rho,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k\left(a_k \cos(k\vartheta) + \beta_k \sin(k\vartheta)\right)$$

<u>Προσδιορισμός των συντελεστών</u>

$U(1,\vartheta) = g(\vartheta)$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(k\vartheta) + \beta_k \sin(k\vartheta)\right) = g(\vartheta)$$

για το a_0 ολοκληρώνω στο $[0, 2\pi]$ διότι $\cos(\kappa\vartheta) = 0 = \sin(\kappa\vartheta)$

$$\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} d\vartheta = \int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m\vartheta)\, d\vartheta + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(a_\kappa \int_0^{2\pi} \overset{0}{\cancel{\cos(\kappa\vartheta)\cos(m\vartheta)d\vartheta}} + \beta_\kappa \int_0^{2\pi} \overset{0}{\cancel{\cos(m\vartheta)\sin(\kappa\vartheta)\,d\vartheta}}\right) = \int_0^{2\pi}\cos(m\vartheta) g(\vartheta)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{γενικά,} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(m\vartheta)\cos(\kappa\vartheta)\, d\vartheta = 0 \quad , m,\kappa \in \mathbb{N} \\ \qquad\qquad \text{αλλά} \quad \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(m\vartheta)\cdot\sin(\kappa\vartheta)\, d\vartheta = \delta_{m,\kappa}\cdot\pi \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a_m \int_0^{2\pi}\cos^2(m\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\cos(m\vartheta)\, g(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\cos(m\vartheta)\, d\vartheta$$

άρα $\quad a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta.$

Άσκηση

Δίνεται το πρόβλημα: $u_t = u_{xx} \quad , \; 0 < x < 1 \, , \; t > 0$

με

$$\left.\begin{array}{l} u_x(0,t) + u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{array}\right\} , \; t > 0$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Fourier για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης. Αρχικά αποδείξτε ότι οι θετικές ιδιοτιμές λ ικανοποιούν την εξίσωση $\boxed{\tan\sqrt{\lambda} = \lambda}$ (*)

i) $\lambda > 0$

$$\rho^2 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \rho = \pm i\sqrt{\lambda}$$

άρα $X(x) = e^{\rho x} = e^{i\sqrt{\lambda}\,x}$

$$= \cos(x\sqrt{\lambda}) + \sin(x\sqrt{\lambda})$$

$$X(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda})$$

όμως $X(1) = 0 \Rightarrow c_1 \cos\sqrt{\lambda} + c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$

$X'(0) + X(0) = 0 \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda} + c_1 = 0 \quad \Rightarrow$

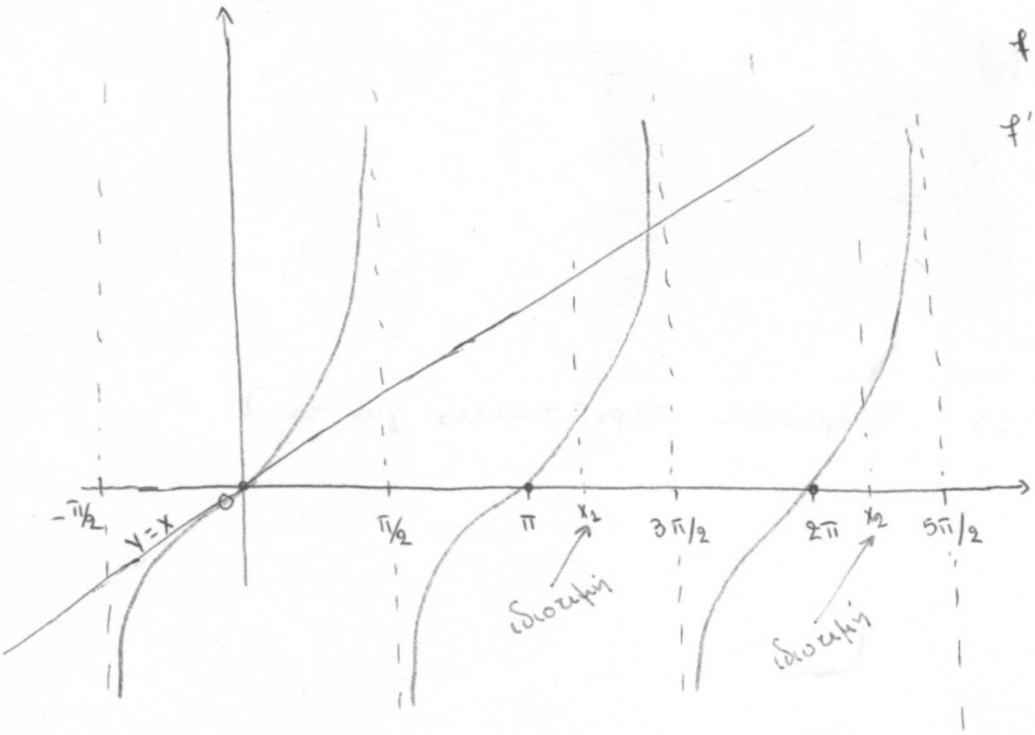
$c_1 = -c_2\sqrt{\lambda}$

$c_2\left(\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\right) = 0$ | $c_2 \neq 0$, αλλιώς $c_1 = c_2 = 0$

άρα $\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$, $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\cos\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \boxed{\tan\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}}$$

θέτω $\sqrt{\lambda} = x$ άρα $\tan x = x$



$f(x) = \tan x - x$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1$

$= \tan^2 x > 0$

$x_1 \rightarrow 3\pi/2$

$x_2 \rightarrow \frac{5\pi}{2}$

$\vdots$

$x_k \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}$

και $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_k}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = 1$

Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι γραφικά (ή αλλιώς) η εξίσωση (*) έχει αριθμήσιμο το πλήθος θετικές λύσεις $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ με $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty$

(με αύξοντα τρόπο), καθώς επίσης και ότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις φ_k δίνονται από τον τύπο $\varphi_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(x-1)\right)$

Στη συνέχεια, εξετάστε αν έχει αρνητικές ιδιοτιμές και πόσες. Τελικά, εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος

Η λύση είναι της μορφής $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$
με συνοριακές συνθήκες: $u(1,t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{X(1)=0}$

$$u_x(0,t) + u(0,t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{X'(0)+X(0)=0}$$

$$X(x)\cdot T'(t) = X''(x)\cdot T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \\ X'(0)+X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{Παίρνουμε περιπτώσεις για το } \lambda.$$

Άσκηση (Συνέχεια) 3.4.2012

$u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$

$u_x(0,t) + u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$

$u(1,t) = 0$

$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$X'(0) + X(0) = 0$

$X(1) = 0$

άρα,

$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$

$X'(0) + X(0) = 0$

$X(1) = 0$

χαρακτηριστική εξίσωση: $\rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho = \pm i\sqrt{\lambda}$

γενική λύση της εξίσωσης: $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$X(x) = c_1 \cdot \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda})$

$X(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda} + c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$

$X'(0) + X(0) = 0 \Leftrightarrow c_2\sqrt{\lambda} + c_1 = 0$ $\Bigg| \Rightarrow$

$c_1 = -c_2\sqrt{\lambda}$

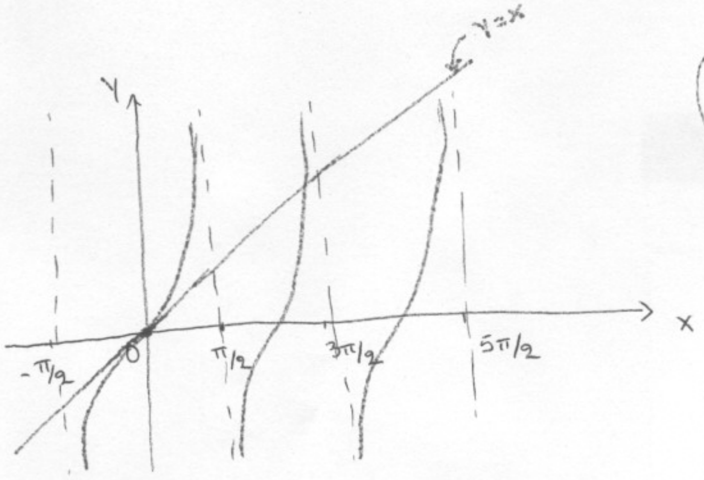
$\Rightarrow \quad c_2 \left[\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cdot \cos\sqrt{\lambda} \right] = 0$

$\Rightarrow$ κάθε θετική ιδιοτιμή

$\tan\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$

$\underline{\sqrt{\lambda} = x}$

$\tan x = x$



$$\left(\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos A\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = 1 \iff \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{(k+\frac{1}{2})\pi} = 1$$

$$X_k(x) = c_2 \cdot \left(\sin(x\sqrt{\lambda_k}) - \sqrt{\lambda_k} \cdot \cos(x\sqrt{\lambda_k}) \right)$$

$$= c_2 \left(\sin(x\sqrt{\lambda_k}) - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}}{\cos\sqrt{\lambda_k}} \cos(x\sqrt{\lambda_k}) \right)$$

$$= \frac{c_2}{\cos(\sqrt{\lambda_k})} \left[\underbrace{\sin(x\sqrt{\lambda_k}) \cdot \cos\sqrt{\lambda_k} - \sin\sqrt{\lambda_k} \cdot \cos(x\sqrt{\lambda_k})}_{=\sin(x\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_k})} \right]$$

$$= \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(x-1)\right)$$

$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \cdot x + c_2$

$X(1) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$

$X'(0) + X(0) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$

$c_2 = -c_1$

$X(x) = c_1(x-1)$

$\lambda_0 = 0$ ιδιοτιμή , $X_0(x) = x-1$ ιδιοσυνάρτηση

Αρνητικές Ιδιοτιμές: $\rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda}$

$$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \quad X(x) = c_1 \cdot e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2 \cdot e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

$$X(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$$

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda} \cdot c_1 \cdot e^{x\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda} \cdot c_2 \cdot e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

$$X'(0) = \sqrt{-\lambda} \cdot (c_1 - c_2)$$

$$X'(0) + X(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) + c_1 + c_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (\sqrt{-\lambda}+1)\, c_1 + (1-\sqrt{-\lambda})\, c_2 = 0 \\ e^{2\sqrt{-\lambda}} \cdot c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} c_2 = -e^{2\sqrt{-\lambda}} \cdot c_1 \\ c_1 \left[\sqrt{-\lambda} + 1 - e^{2\sqrt{-\lambda}} (1-\sqrt{-\lambda}) \right] = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c_2 = -e^{2\sqrt{-\lambda}} \cdot c_1 \\ 1 + \sqrt{-\lambda} - e^{2\sqrt{-\lambda}}(1-\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\underline{\sqrt{-\lambda} = x > 0}$$

$$(1) \quad 1 + x - (1-x)\, e^{2x} = 0$$

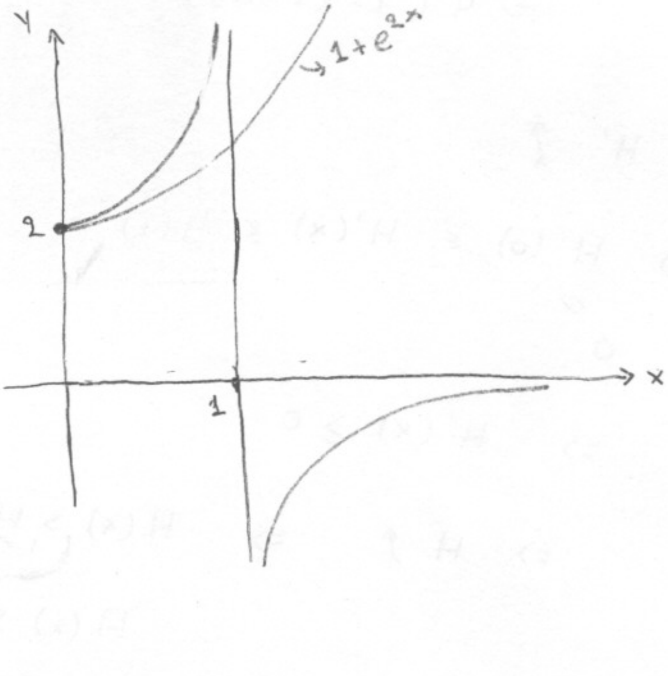
Παρατηρώ ότι το $x = 1$ $\underline{\underline{\text{δεν}}}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+1+x-1}{1-x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-x} - 1 = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{1-x}}_{g(x)} = \underbrace{1 + e^{2x}}_{f(x)}$$



$g'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ $\qquad$ $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

$g'(0) = 2$ $\qquad$ $f'(0) = 2$

$g''(x) = \dfrac{4}{(1-x)^3}$ $\qquad$ $f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$

$g''(0) = 4$ $\qquad$ $f''(0) = 4$

$g'''(x) = \dfrac{12}{(1-x)^4}$ $\qquad$ $f'''(x) = 8 \cdot e^{2x}$

$g'''(0) = 12$ $\qquad$ $f'''(0) = 8$

$\underline{x < 1}$

$H : [0, 1) \to \mathbb{R}$: $\quad H(x) = 2 - (1-x) \cdot (1 + e^{2x})$

$$= 2 - (1-x) - (1-x) \cdot e^{2x}$$

$$= 1 + x - (1-x) e^{2x}$$

$H'(x) = 1 + e^{2x} - 2(1-x) e^{2x}$

$H''(x) = 4 \cdot e^{2x} - 4(1-x) e^{2x}$

$= 4 [1 - (1-x)] \cdot e^{2x} = 4 \cdot x \cdot e^{2x} > 0, \quad 0 < x < 1$

$H' \uparrow$

$\Rightarrow H'(0) \leq H'(x) \leq H(1) \ldots, \quad 0 < x < 1$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$\Rightarrow H'(x) \geq 0$

$\Rightarrow H \uparrow \quad \Rightarrow \quad H(x) > \cancel{H(0)}^{0}, \quad 1 > x > 0$

$H(x) > 0$

μόνο μια λύση στο $x = 0$.

άρα <u>δεν</u> υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές.

Οπότε, $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = x-1$

λ_k $(\tan\sqrt{\lambda_k} = \sqrt{\lambda_k})$, $\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x-1))$

$\underline{\lambda_0 = 0}$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \Rightarrow T(t) = e^{-\lambda t}$$

$\lambda_0 = 0 \rightarrow u_0(x,t) = x-1$

$0 < \lambda_k \longrightarrow u_k(x,t) = e^{-\lambda_k t} \sin(\sqrt{\lambda_k}\cdot(x-1))$

<u>γενική λύση:</u> $u(x,t) = c_0(x-1) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-\lambda_k \cdot t} \sin(\sqrt{\lambda_k}\cdot(x-1))$

<u>Αρμονικές Συναρτήσεις</u> (SoS)

Εξίσωση Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad , \quad x^2+y^2=1$$

$u(x,y) = U(r,\vartheta)$

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_\vartheta = 0$$

$U(r,\vartheta) = A(r)\cdot B(\vartheta)$

$$r^2\cdot\frac{A''(r)}{A(r)} + r\cdot\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)} = 0 \quad , \quad 0<r<1 \quad , \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

$$\frac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)} = -\lambda \quad \text{και} \quad r^2\cdot\frac{A''(r)}{A(r)} + r\cdot\frac{A'(r)}{A(r)} = -\lambda.$$

συνοδεύεται από συνοριακές περιοδικές συνθήκες:

$$B(0) = B(2\pi)$$

$$B'(0) = B'(2\pi)$$

Αυτό το πρόβλημα έχει ιδιοτιμές: $\lambda_0 = 0$ — 1

$\lambda_k = k^2$ — $\sin k\theta$, $\cos k\theta$ $\quad k = 1, 2, \dots$

<u>$\lambda_0 = 0$</u> $\Rightarrow$ $r A''(r) + A'(r) = 0$

$$\Rightarrow (rA')' = 0$$

$$\Rightarrow rA'(r) = c_1$$

$$\Rightarrow A(r) = \underbrace{c_1 \cancel{\ln r}}\ + c_2$$

όχι φραγμένη άρα δεν έχει μονοσήμαντη λύση

απειρίζεται άρα απορρίπτεται

$$\Rightarrow A(r) = 1.$$

<u>Σημείωση</u>: Όταν έχουμε φραγμένο χωρίο, έχουμε μονοσήμαντο λύσεων. Όταν δεν έχουμε φραγμένο χωρίο, <u>δεν</u> έχουμε μονοσήμαντο λύσεων.

<u>$\lambda_k = k^2$</u> $\Rightarrow$

$$r^2 A'' + r A' - k^2 A = 0$$

δυο λύσεις: r^k, $\cancel{r^{-k}}$

απορρίπτεται επειδή είμαστε στο $[0,1)$

(<u>Παρατήρηση</u>

$$x \cdot (x^\mu)' = \mu \cdot x^\mu$$

$$x^2 (x^\mu)'' = \mu(\mu-1) \cdot x^\mu$$)

(r,ϑ)

άρα $\quad \lambda_0 \quad — \quad 1$

$\lambda_k = k^2 \quad — \quad r^k \cdot \sin k\vartheta$

$r^k \cos k\vartheta$

$$\boxed{U(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot r^k \cos k\vartheta + \beta_k \cdot r^k \sin k\vartheta\right)}$$

↳ γενική λύση των αρμονικών συναρτήσεων στη μοναδιαία μπάλα.

Αν μου δίνει συνοριακές συνθήκες:

$f(x,y) = \varphi(\vartheta) \quad , \quad x^2+y^2=1.$

$f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \varphi(\vartheta)$

$$U(1,\vartheta) = \varphi(\vartheta) \Longleftrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\vartheta + \beta_k \sin k\vartheta\right) = \varphi(\vartheta)$$

Επειδή έχουμε το a_0, το "k" τρέχει από 0 έως ∞

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cos k\vartheta \cdot d\vartheta \quad , \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cdot \sin k\vartheta \, d\vartheta \quad , \quad k = 1,2,\dots$$

εδώ δεν έχουμε β_0 άρα το "k" τρέχει από 1 έως ∞.

$$U(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \cos kt \, dt\right] \cdot r^k \cdot \cos k\vartheta + \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \sin kt \cdot dt\right] \cdot r^k \cdot \sin k\vartheta\right)$$

$$\frac{r^k}{\pi}\left[\left(\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \cos kt \, dt\right) \cos k\vartheta + \left(\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \sin kt \, dt\right) \sin k\vartheta\right]$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_0 \varphi(t) \left(\cos kt \cdot \cos k\vartheta + \sin kt \cdot \sin k\vartheta\right) dt$$

$$= \frac{r^k}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \cos\left(k(t-\vartheta)\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot r^k \cdot \cos\left(k(t-\vartheta)\right) dt$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad , \quad (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \leftarrow \text{ακολουθία}$$

ύνηθες: Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = A$$

$S_1 = c_1$

$S_2 = c_1 + c_2$

$\vdots$

$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_3$

5.4.2012

$$\Delta u = 0 \quad , \ x^2+y^2<1$$
$$u = f \quad , \ x^2+y^2=1$$

$$u(x,y) = U(r,\vartheta)$$

$$\Rightarrow U_{rr}(r,\vartheta) + \frac{1}{r}U_r(r,\vartheta) + \frac{1}{r^2}U_{\vartheta\vartheta}(r,\vartheta) = 0 \quad , \ 0<r<1$$
$$0 \le \vartheta < 2\pi$$

$$U(1,\vartheta) = g(\vartheta)$$
$$f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = g(\vartheta)$$

$$U(r,\vartheta) = A(r)\cdot B(\vartheta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{B''(\vartheta)}{B(\vartheta)} = -\lambda \\ \\ B(0) = B(2\pi) \\ B'(0) = B'(2\pi) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_0 = 0 \ , \ B_0(\vartheta) = 1 \\ \\ \lambda_k = k^2 \ , \ \sin(k\vartheta), \cos(k\vartheta) \ , \ k = 1,2,\dots \end{array}$$

γενική λύση: $U(r,\vartheta) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k r^k \cos(k\vartheta) + \beta_k r^k \sin(k\vartheta)\right)$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\cos(k\vartheta)\,d\vartheta \quad , \ k = 0,1,2,\dots$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\sin(k\vartheta)\,d\vartheta \quad , \ k = 1,2,\dots$$

$$a_k\cos(k\vartheta) + \beta_k\sin(k\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos kt\,dt\,\cos k\vartheta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin kt\,dt\cdot\sin k\vartheta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cdot\cos k(t-\vartheta)\,dt$$

άρα $$U(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r^k\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos k(t-\vartheta)\,dt\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$$

ακολουθία των μερικών αθροισμάτων c_k

τότε $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} S_n = C$

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = f(t) \quad , \forall t \in [0,1]$$

<u>Κατά σημείο σύγκλιση</u> (σημειακή)

$\forall t \in [0,1]$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ συγκλίνει σημειακά $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

αν $\forall t \in [0,1]$ $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ συγκλίνει και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = f(t)$$

<u>ορσ</u>: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, t)$ όταν $|S_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad , n \geq n_0.$

<u>Ομοιόμορφη Σύγκλιση</u>

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |S_n(t) - f(t)| < \varepsilon , \quad n \geq n_0 \quad \forall t \in [0,1].$

<u>Σύγκλιση κατά L^2 μέση</u>

$$L^2[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^1 f^2(x)\,dx < \infty \right\}$$

$f_k \to f$ κατά L^2 $\underline{\underline{\text{ανν}}}$ $\lim \int_0^1 (f_k - f)^2\,dt = 0$

(<u>γενικά</u>, $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 (f_k - f)^p\,dt = 0$ κατά L^p).

Αν $f_k \to f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής $\forall k = 1, 2, \ldots$ και

$f_k \to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f$ συνεχής

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Riemann ολοκληρ.

$$r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{r^k}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos k(t-\vartheta)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_0^{2\pi} g(t)\, r^k \cos k(t-\vartheta)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \underbrace{\left[1 + 2 \sum_{k=1}^{N} r^k \cos k(t-\vartheta) \right]}_{\text{θέτω}} dt$$

Έστω $1 + 2 \sum_{k=1}^{N} r^k \cos(kw)$ $h_N(r,w)$

<u>υσχέτιση</u>: $1 + 2 \sum_{k=1}^{N} x^k = 1 + 2(x + x^2 + \dots + x^N)$

$$= 1 + 2 \cdot x \underbrace{\frac{1-x^N}{1-x}}_{N} = 1 + 2 \cdot N$$

<u>Τύπος Euler</u> $e^{i\pi} = 1$

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

και $e^{ik\vartheta} = \cos k\vartheta + i \sin k\vartheta$

<u>Τύπος De Moivre</u> $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$

$$\left.\begin{aligned} e^{ik\vartheta} &= \cos k\vartheta + i\sin k\vartheta \\ e^{-ik\vartheta} &= \cos k\vartheta - i\sin k\vartheta \end{aligned}\right| \Rightarrow \cos k\vartheta = \frac{1}{2}\left(e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}\right)$$

άρα

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} r^k \cos(kw) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r^k \left(e^{ikw} + e^{-ikw}\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} r^k e^{ikw} + \sum_{k=1}^{N} r^k e^{-ikw}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} (re^{iw})^k + \sum_{k=1}^{N} (re^{-iw})^k$$

$$= 1 + re^{iw}\frac{1-(re^{iw})^N}{1-re^{iw}} + re^{-iw}\frac{1-(re^{-iw})^N}{1-re^{-iw}}$$

$$= \frac{(1-re^{iw})(1-re^{-iw}) + \left(re^{iw} - (re^{iw})^{N+1}\right)(1-re^{-iw}) + \left(re^{-iw} - (re^{-iw})^{N+1}\right)(1-re^{iw})}{(1-re^{iw})(1-re^{-iw})}$$

$$= \frac{1-2r\cos w + r^2 + re^{iw} - r^2 - r^{N+1}e^{i(N+1)w} + r^{N+2}e^{iNw} + re^{-iw} - r^2}{1-2r\cos w + r^2}$$

$$+ \frac{r^{N+1}e^{-(N+1)w} + r^{(N+1)}e^{-iNw}}{1-2r\cos w + r^2}$$

$$= \frac{1 - r^2 - 2r^{(N+1)}\cos(N+1)w + 2r^{(N+2)}\cos Nw}{1-2r\cos w + r^2}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cos w + r^2} + \frac{2r^{(N+1)}\left(-\cos(N+1)w + r\cos Nw\right)}{1-2r\cos w + r^2}$$, όπου $w = t - \vartheta$ και

$$|\;\;| \leq \frac{1+r}{1-2r\cos w + r^2}$$

$r < 1$ άρα $\lim_{N\to\infty} r^{N+1} = 0$

$$\lim_{N\to\infty} h_N(r,w) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos w + r^2}$$ ομοιόμορφο ως προς το $w \in [0, 2\pi]$, $\forall r < 1$

$$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty} S_N(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) \lim_{N\to\infty} h_N(r, t-\vartheta)\, dt$$

$$= \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2}\, dt$$

άρα $$U(r,\vartheta) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2}\, dt$$

πολικές

άρα στο αρχικό $u(x,y) = (1-x^2-y^2) \displaystyle\int_{|\bar{x}|=1} \frac{f(\bar{x})}{|x-\bar{x}|^2}\, dS(\bar{x})$

Πυρήνας Dirichlet

$$K(r,\vartheta,t) = \frac{1-r^2}{2\pi\left(1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2\right)}$$

και $\displaystyle\int_0^{2\pi} K(r,\vartheta,t)\, dt = 1.$

24.4.2012

Σειρές Fourier

$$-\Delta u = 0 \quad , \; x^2+y^2<1$$
$$u = f \quad , \; x^2+y^2=1$$

$$u_t = u_{xx} \quad , \; 0<x<\pi \; , \; t>0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$

γενική λύση: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 \cdot t} \sin(kx)$

Για να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \quad , \; 0 \le x \le \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cdot \sin(kx)\, dx$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$: σειρά Fourier που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\varphi(x)$ κατά τα ημίτονα μόνο.

$0 \le x \le \pi$

<u>Συμβολισμός</u>: $\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$

<u>Ερώτημα</u>

Ποια είναι η σχέση μεταξύ της σειράς Fourier μιας συνάρτησης και της συνάρτησης που ξεκινάμε?

Περιοδικές Συναρτήσεις $[0, 2\pi]$

Έχοντας την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο 2π

$(f(x+2\pi) = f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R})$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\varphi \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \qquad \varphi, \varphi_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$$

$$S_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon, x)$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon \quad , \quad \forall n \geq N_0$$

Αν $\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon, x)$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon \quad , \quad \forall n \geq N_0$$

τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

$$S_n \xrightarrow{L^2} S \quad : \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |S_n(x) - S(x)|^2 \, dx = 0$$

σύγκλιση κατα L^2 μέσο

Ομοιόμορφη $\Rightarrow$ σύγκλιση κατά L^2.

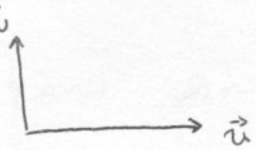
Η ασθενέστερη μορφή σύγκλισης είναι η κατά L^2.

$k = 1, 2, \dots$
$m = 0, 1, 2, \dots$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos mx \, dx = 0}$$ ← Ιδιότητα των περιοδικών συναρτήσεων
<u>Καθετότητα</u> ή <u>ορθογωνιότητα</u>.

- $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

($\vec{u}, \vec{v}$ κάθετα ή ορθογώνια)



- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

(u_1, u_2, u_3) (v_1, v_2, v_3)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

$f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$$

$f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g}(x) \, dx$$

↓ συζυγές

<u>Βασικές Ιδιότητες</u>

L^2 ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

$$\langle \, , \, \rangle \quad L^2[0, 2\pi] \times L^2[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$$

- $f \perp g$ όταν $\int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx = 0$.

- Έστω: $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ $[a, \beta] \to \mathbb{R}$

ορθογώνιες συναρτήσεις

$$\int_a^\beta X_i(x) \cdot X_j(x) \, dx = 0 \quad , \forall i \neq j$$

<u>Κανονική</u>: $\int_a^\beta X_k^2(x) \, dx = 1 \quad , \forall k = 1, 2, \dots$

Έστω $X_i : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ ορθογώνιο (σύστημα) συναρτήσεων
$i = 1, 2, \ldots$

και $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση L^2 ολοκληρώσιμη
$\left(\int_a^\beta f^2(x)\, dx \right.$ υπάρχει$\left. \right)$

Συντελεστές Fourier της f ως προς το ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot X_k$$

όπου

$$a_k = \frac{\int_a^\beta f(x) \cdot X_k(x)\, dx}{\int_a^\beta X_k^2(x)\, dx}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Είναι οι συντελεστές Fourier της f ως προς το ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων (X_k).

Θεώρημα

Έστω $X_k : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων και $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ L^2 ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta \left| f(x) - c_1 X_1(x) - c_2 X_2(x) - \ldots - c_k X_k(x) \right|^2 dx \geq \int_a^\beta \left| f(x) - a_1 X_1(x) - \ldots - a_k X_k(x) \right|^2 dx$$

όπου $a_1 = \dfrac{\int_a^\beta f(x) X_1(x)\, dx}{\int_a^\beta X_1^2(x)\, dx}$, ..., $a_k = \dfrac{\int_a^\beta f(x) X_k(x)\, dx}{\int_a^\beta X_k^2(x)\, dx}$

Απόδειξη $\left(\text{Ταυτότητα: } (\beta_1+\dots+\beta_k)^2 = \beta_1^2+\dots+\beta_k^2 + 2\sum_{i<j}\beta_i\beta_j\right)$

$$\int_a^\beta |f(x) - c_1X_1 - \dots - c_kX_k|^2\,dx =$$

$$\int_a^\beta |f(x)|^2dx + c_1^2\int_a^\beta X_1^2(x)\,dx + \dots + c_k^2\int_a^\beta X_k^2(x)\,dx - 2\sum_{i=1}^k c_i\int_a^\beta f(x)X_i(x)\,dx$$

$$+ 2\sum_{i<j} c_ic_j \cancel{\int_a^\beta X_i(x)X_j(x)dx}^{\,0}$$

ορθογώνια

$$= \int_a^\beta |f(x)|^2dx + \left(c_1^2\int_a^\beta X_1^2(x)\,dx - 2c_1\int_a^\beta f(x)X_1(x)\,dx\right) + \dots + \left(c_k^2\int_a^\beta X_k^2(x) - 2c_k\int_a^\beta f(x)X_k(x)\,dx\right)$$

$$Ax^2 - 2Bx = A\left[x^2 - 2\frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{A}\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2\right]$$

$$= A\left(x - \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A}$$

$A \geq 0$

$$Ax^2 - 2Bx \geq -\frac{B^2}{A}$$

Παίρνει την ελάχιστη τιμή για $x = \frac{B}{A}$

Οπότε, $c_1^2\int_a^\beta X_1^2(x)\,dx - 2c_1\int_a^\beta f(x)X_1(x)\,dx \geq -\dfrac{\left(\int_a^\beta f(x)X_1(x)\,dx\right)^2}{\int_a^\beta X_1^2(x)\,dx}$

και αντίστοιχα, $c_k^2\int_a^\beta X_k^2(x)\,dx - 2c_k\int_a^\beta f(x)X_k(x)\,dx \geq -\dfrac{\left(\int_a^\beta f(x)X_k(x)\,dx\right)^2}{\int_a^\beta X_k^2(x)\,dx}$

Δηλαδή, $\int_a^\beta |f(x) - c_1X_1(x) - \dots - c_kX_k(x)|^2dx \geq$

$$\int_a^\beta f^2(x)\,dx - \frac{\left(\int_a^\beta f(x)X_1(x)\,dx\right)^2}{\int_a^\beta X_1^2(x)\,dx} - \dots - \frac{\left(\int_a^\beta f(x)X_k(x)\,dx\right)^2}{\int_a^\beta X_k^2(x)\,dx}$$

(*)

$$a_i^2 = \frac{\left(\int_a^\beta f(x) X_i(x)\,dx\right)^2}{\left(\int_a^\beta X_i^2(x)\,dx\right)^2}$$

$$a_i^2 \int_a^\beta X_i^2(x)\,dx = \frac{\left(\int_a^\beta f(x) X_i(x)\,dx\right)^2}{\int_a^\beta X_i^2(x)\,dx}$$

Επομένως, $\overset{(*)}{=} \int_a^\beta f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \int_a^\beta X_i^2(x)\,dx$

$$= \int_a^\beta \left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} a_i X_i(x) \right|^2 dx$$

Όμως, $\int_a^\beta \left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} a_i X_i(x) \right|^2 dx = \int_a^\beta f^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \int_a^\beta X_i^2(x)\,dx$

$$- 2 \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{\int_a^\beta f(x) X_i(x)\,dx}_{a_i \int_a^\beta X_i^2(x)\,dx}$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \int_a^\beta X_i^2(x)\,dx$$

$$= \int_a^\beta f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \int_a^\beta X_i^2(x)\,dx \geq 0$$

Θεώρημα (ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BESSEL)

Αν $X_k : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων και $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι L^2 ολοκληρώσιμη συνάρτηση,

Τότε ισχύει η ανισότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \int_a^\beta X_k^2(x)\,dx \leq \int_a^\beta |f(x)|^2\,dx$$

όπου a_k είναι οι συντελεστές Fourier της f ως προς το σύστημα του X_k, δηλαδή

$$a_k = \frac{\int_a^\beta f(x) X_k(x)\,dx}{\int_a^\beta X_k^2(x)\,dx}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

10 5 2012

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

$f \in L^2 \Rightarrow S_N(x) \xrightarrow{L^2} f(x)$, $\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} (S_N(x) - f(x))^2 \, dx = 0$

$f \in C^1$ & 2π περιοδική $\Rightarrow S_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$, $\forall x \in [0, 2\pi]$

Ταυτότητα Parseval

Αν το σύστημα είναι πλήρες

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \int_a^{\beta} f^2(x)\, dx$$

Ανισότητα Bessel

L^2 ολοκλ. $\to f$, $\int_a^{\beta} \chi_k^2(x)\, dx = 1$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$$A_k = \int_a^{\beta} f(x)\, x_k(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \le \int_a^{\beta} f^2(x)\, dx$$

Ανισότητα Bessel και Ταυτότητα Parseval μεταφράζονται:

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + \beta_k^2) = \pi \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx$$

Θεώρημα

Αν f 2π περιοδική και C^1 , τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

$$S_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x) \quad \text{ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη

$S_N(x) \to f(x)$ καθώς $N \to \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Επομένως $S_N(x) - f(x) = -\sum\limits_{N+1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$

Χρησιμοποιούμε το <u>Κριτήριο Weierstrass:</u>

Αν $|f_k(x)| \le M_k$ $\forall x$ και $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα

$$|a_k \cos kx| \le |a_k| \quad , \quad |b_k \sin kx| \le |b_k|$$

και αφού $\displaystyle |S_N(x) - f(x)| \le \sum_{N+1}^{\infty} (|a_k| + |\beta_k|)$

Αρκεί επομένως να συγκλίνει η σειρά $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |\beta_k|)$

<u>Υποπρόβλημα</u>

Έστω $f \in C^1$, 2π περιοδική

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

και έστω $\displaystyle \underset{\text{παράγωγος}}{f'} \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' \cos kx + \beta_k' \sin kx)$

τότε $a_0' = 0$, $a_k' = k\beta_k$, $\beta_k' = -k \cdot a_k$

<u>Απόδειξη</u>

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\cancel{f(2\pi) - f(0)}^{\,0}\right) = 0 \quad \text{αφού } f \ 2\pi \text{ περιοδική}$$

$$a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot(\cos kx)'\,dx + \cancel{\frac{1}{\pi} f(x)}^{\,0}\cos kx\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = k \cdot \beta_k$$

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} k\,(\beta_k \cos kx - a_k \sin kx)$$

Τι εξασφαλίζει η ανισότητα Bessel για την f' ?

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2 + k^2\beta_k^2) \leq \pi\int_0^{2\pi}(f'(x))^2\,dx$$

οπότε η $\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2 + k^2\beta_k^2)$ συγκλίνει

Θ.δ.ο και η $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |\beta_k|)$ συγκλίνει

(αν $a_k \leq \beta_k$ και $\sum \beta_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_k$ συγκλίνει).

$|a_k| + |\beta_k| \leq \ldots k^2(a_k^2 + \beta_k^2)$

θέλω να τους συσχετίσω

$|a_k| \leq \sqrt{k^2 a_k^2}$

$a_k^2 \leq k^2 a_k^2$

άρα $|a_k| + |\beta_k| \leq \sqrt{k^2(a_k^2 + \beta_k^2)}$

Ερώτημα

$|x| + |y| \leq c\sqrt{x^2+y^2}$

και πχ $c=2$ Έχω $|x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$

$2|xy| \leq 3(x^2+y^2)$ και ξέρω

$2xy \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

άρα $2xy \leq x^2+y^2$

$x^2+2xy+y^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$x+y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$

Τώρα $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |\beta_k|) \quad . \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+\beta_k^2)}$

από Cauchy - Schwartz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \right)^{1/2}$$

άρα $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |\beta_k|) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|a_k| + |\beta_k|)^2 \right)^{1/2}$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \leq \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + \beta_k^2) \right)^{1/2}$$

συγκλίνουν

άρα $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |\beta_k|)$ συγκλίνει

άρα $\displaystyle |S_N(x) - f(x)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} (|a_k| + |\beta_k|)$

$\displaystyle \Rightarrow \lim_{N \to \infty} (S_N(x) - f(x)) = 0$ ομοιόμορφα

Θέμα 3 / Πρόοδος

$u_t - u_{xx} = 0$, $x>0$, $t>0$

$u(x,0) = f(x)$, $x>0$

$u(0,t) = 0$, $t>0$

Περιττή επέκταση $f_\pi(x) = \begin{cases} f(x) & , x>0 \\ -f(-x) & , x<0 \end{cases}$

$v_t - v_{xx} = 0$

$v(x,0) = f_\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\qquad v(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f_\pi(y)\, dy$

15 5 2012

Αρχή Μεγίστου

I) Μόνο για Ελλειπτικά Προβλήματα

&

II) για Παραβολικά Προβλήματα

Πολύ απλό πρόβλημα

$u''(x) \geq 0$

Κυρτή συνάρτηση

$u(x) \leq \max\big(u(a), u(\beta)\big)$

$\forall x \in [a, \beta]$

$u(y) \geq u'(x)(y-x) + u(x)$

$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y)$

$\forall \lambda \in [0,1]$

Θεώρημα $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

Έστω $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό & φραγμένο χωρίο

που ικανοποιεί

$$a(x,y) \cdot u_{xx}(x,y) + 2\beta(x,y) u_{xy}(x,y) + \gamma(x,y) u_{yy}(x,y) + \delta(x,y) u_x(x,y) + \varepsilon(x,y) u_y(x,y) \geq 0$$

στο Ω, όπου οι συναρτήσεις $a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις με την επιπρόσθετη ιδιότητα: να είναι ομοιόμορφα Ελλειπτικού Τύπου

$$\begin{pmatrix} a(x,y) & \beta(x,y) \\ \beta(x,y) & \gamma(x,y) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας είναι:

δετικά ορισμένος	ομοιόμορφα δετικά ορισ.
$a(x,y) \geq 0$	$a(x,y) > 0$
$a\gamma - \beta^2 \geq 0$	$a\gamma - \beta^2 > 0$

Τότε $u(x,y) \leq \max_{\partial\Omega} u(x,y)$.

$$\left(\begin{array}{c} \max_{\bar\Omega} u(x,y) \\ \| \\ \max_{\partial\Omega} u(x,y) \end{array} \right)$$

Πρόταση

Έστω $u \in C(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$ ώστε $\Delta u(x) \geq 0$ στο Ω $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$

Τότε $\max_{\bar\Omega} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x)$

Θα αποδείξουμε πρώτα για $\Delta u(x) > 0$.

Έστω πως δεν ισχύει, τότε $\exists x_0 \in \Omega$ τ.ω

$u(x_0) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$

τότε $\max_{\bar\Omega} u(x) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$

Έστω $z_0 \in \Omega$, $u(z_0) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$

οπότε $\nabla u(z_0) = 0$

&

$\Delta u(z_0) \leq 0$. Αντίφαση

$A = (a_{ij})$

$trA = a_{11} + \dots + a_{nn}$

$\Downarrow$

$trA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Απόδειξη (Θεώρημα)

Για $\varepsilon > 0$, θέτουμε $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$

τότε $\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) + 2n\varepsilon > 0$

Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα στην $u_\varepsilon(x)$, δηλαδή

$(\max(f+g) \leq \max f + \max g)$

$$u_\varepsilon(x) \leq \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

$$u(x) + \varepsilon|x|^2 \leq \max_{\partial\Omega} u(x) + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$$

$$\Rightarrow \quad u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x)$$

$\Delta u \geq 0$
$\Rightarrow$ Αρχή Μεγίστου

$\Delta u \leq 0$
$\Rightarrow$ Αρχή Ελαχίστου

Εφαρμογή της Αρχής του Μεγίστου

Άσκηση Αποδείξτε ότι το πρόβλημα,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x^2)\,u_x(x,y)\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big((1+x^2+y^2)\,u_y(x,y)\Big) = f \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad , \quad x^2+y^2=1$$

έχει το πολύ μια λύση.

Αν $\Delta u = 0$

$\Rightarrow u(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u(x)$

&

$u(x) \geq \min\limits_{\partial\Omega} u(x)$

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις. τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big((1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0 \quad , \quad x^2+y^2<1$$

$$w(x,y) = 0 \quad , \quad x^2+y^2=1.$$

$$\Downarrow$$

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial w}{\partial x} + (1+x^2+y^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

$$a(x,y) = 1+x^2 \geq 1 \quad , \quad x^2+y^2 \leq 1$$

$$-4(1+x^2)(1+x^2+y^2) \leq -4$$

Έχουμε ομοιόμορφα Ελλειπτικό τελεστή, άρα έχουμε και αρχή μεγίστου και αρχή ελαχίστου, δηλαδή

$$w(x,y) \leq \max_{\partial\Omega:\, x^2+y^2=1} w(x,y) = 0$$

&

$$w(x,y) \geq \min_{\partial\Omega:\, x^2+y^2=1} w(x,y) = 0$$

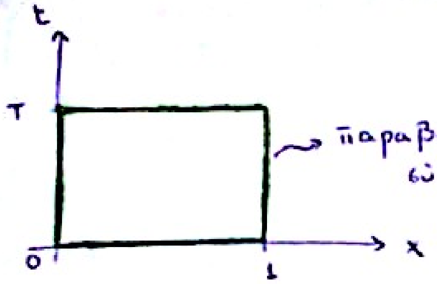
άρα $w(x,y) = 0 \quad , \quad x^2+y^2<1$

Άτοπο

13.5.2012

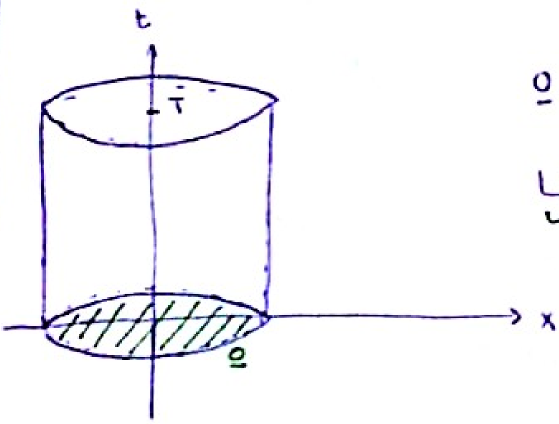
Αρχή Μεγίστου (για Παραβολικά Προβλήματα)

$u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$



$u \in C^{2,1}\big((0,1)\times(0,+\infty)\big) \cap C\big([0,1]\times[0,+\infty)\big)$

Παραβολικό σύνορο: $\big([0,1]\times\{0\}\big) \cup \big(\{0,1\}\times[0,T]\big)$



$\Omega_T = \Omega \times [0,T]$

$\underbrace{\partial \Omega_T}_{\text{Παραβολικό σύνορο των χωρίων.}} = \bar{\Omega} \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]$

Ω φραγμένο $\Delta u \geq 0 : \Omega$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Αν $\Delta u \leq 0 \Rightarrow \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

Θεώρημα

Έστω $T>0$ και $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ συνάρτηση που ικανοποιεί $u_t - \Delta u \leq 0$, $x \in \Omega$, $0<t\leq T$

Τότε ισχύει: $\max\limits_{\bar{\Omega}_T} u = \max\limits_{\cup \Omega_T} u$

Αντίστοιχα,

Θεώρημα

Αν $T>0$ και $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ συνάρτηση που ικανοποιεί: $u_t - \Delta u \geq 0$, $\Omega \times (0,T]$

Τότε: $\min\limits_{\bar{\Omega}_T} u = \min\limits_{\cup \Omega_T} u$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon |x|^2$, $x \in \Omega$

τότε $u_\varepsilon \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap (\bar{\Omega} \times [0,T])$ και ικανοποιεί

$$u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon = u_t - \Delta u - 2n\varepsilon < 0 \quad (1), \quad \varepsilon > 0$$

Θα αποδείξουμε ότι $\max\limits_{\bar{\Omega}_T} u_\varepsilon = \max\limits_{\cup \Omega_T} u_\varepsilon$

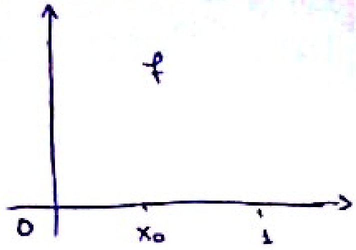
Έστω πως δεν αληθεύει, τότε θα υπάρχει κάποιο σημείο (x_0, t_0)

$(x_0,t_0) \in \bar{\Omega}_T \setminus \cup \Omega_T$ τότε $\max\limits_{\bar{\Omega}_T} u_\varepsilon = u_\varepsilon(x_0,t_0) > \max\limits_{\cup \Omega_T} u_\varepsilon$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i). $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0,T)$

ii). $(x_0, t_0) \in \Omega \times \{T\}$



$f(x_0) \geq f(x) \Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \leq 0$

i). (Εσωτερικό σημείο).

$u_\varepsilon = w$

$\nabla_x w(x_0, t_0) = 0$

Παραγώγιση στη χωρική μεταβλητή

$w_t(x_0, t_0) = 0$

$\Delta_x w(x_0, t_0) \leq 0$

τότε $w_t(x_0, t_0) - \Delta w(x_0, t_0) = 0 - \Delta w(x_0, t_0) \geq 0$

Άρα αντιφάσκει με την (*). Άτοπο

Συνεπώς, δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο

ii). τότε $\nabla_x w(x_0, t_0) = 0$ και $w_t(x_0, t_0) \geq 0$

$\Delta_x w(x_0, t_0) \leq 0$

οπότε: $w_t(x_0, t_0) - \Delta_x w(x_0, t_0) \geq 0$.

Πάλι αντιφάσκει με την (*).

Άτοπο

Επομένως, $\forall \varepsilon > 0$ $\max\limits_{\bar{\Omega}_T} u_\varepsilon = \max\limits_{U\Omega_T} u_\varepsilon$

$$u_\varepsilon \leq \max_{U\Omega_T} u_\varepsilon$$

$$u(x,t) + \varepsilon |x|^2 \leq \max_{U\Omega_T} u_\varepsilon$$

$$\leq \max_{U\Omega_T} u + \varepsilon \underbrace{\overbrace{\max_{U\Omega_T} |x|^2}^{= M \text{, αριθμός}}}_{= \max\limits_{\bar{\Omega}} |x|^2}$$

άρα $u(x,t) + \varepsilon |x|^2 \leq \max\limits_{U\Omega_T} u + \varepsilon M$

$\forall \varepsilon > 0$
$\Rightarrow u(x,t) \leq \max\limits_{U\Omega_T} u \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}_T} u(x,t) = \max_{U\Omega_T} u$$

Άσκηση

Αποδείξτε το μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) \quad , \quad 0<x<1 \ , \ t>0$$

$$u(x,0) = g(x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = h_1(t)$$

$$u(1,t) = h_2(t) \quad , \quad 0 \le t$$

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις. Τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα

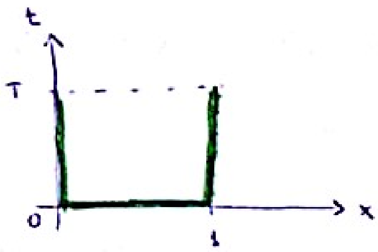
$$w_t - w_{xx} = 0 \quad , \quad 0<x<1, \ t>0$$

$$w(x,0) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

Έστω (x_1, t_1) σημείο ώστε $w(x_1,t_1) \neq 0$. Τότε παίρνουμε $T = t_1 + 1$ και εφαρμόζουμε την αρχή μεγίστου στο $[0,1] \times [0,T]$.

Τότε έχουμε: $\max\limits_{\bar{\Omega}_T} w = \max\limits_{\sqcup \Omega_T} w \quad \left(\Rightarrow w(x,t) \le \max\limits_{\sqcup \Omega_T} w \right)$



$$\Rightarrow w(x,t) \le 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T$$

Από την αρχή ελαχίστου (Αφού $w_t - w_{xx} \geq 0$)

$$\min\limits_{\bar{\Omega}_T} w = \min\limits_{\sqcup \Omega_T} w$$

$$\Rightarrow w(x,t) \geq \min\limits_{\sqcup \Omega_T} w = 0 \Rightarrow w(x,t) \geq 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T$$

Οπότε $w(x,t)=0$, $0\le x\le 1$, $0\le t\le T$

Αντίφαση! αφού $0<t_1<T$ και $w(x_1,t_1)\neq 0$

Άσκηση

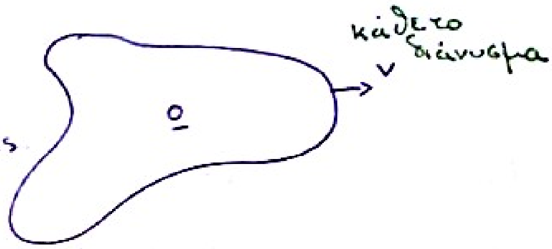
Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος:

$\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο

$$\Delta u = f \quad , \quad \underline{\Omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + u = g \quad , \quad \partial\underline{\Omega}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u(x) = f(x), \quad x\in\underline{\Omega} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) + u(x) = g(x) \\ \qquad\qquad x\in\partial\underline{\Omega} \end{array}}$$



Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις

Τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το

πρόβλημα: $\Delta w = 0$, $\underline{\Omega}$

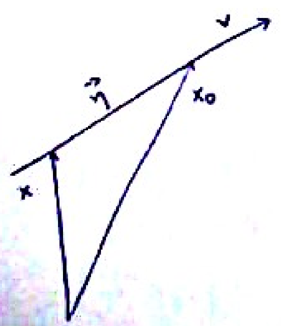
$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + w = 0 \quad , \quad \partial\underline{\Omega}$$

$1^{ος}$ τρόπος (Αρχή μεγίστου).

$$w(x) \le \max_{\partial\underline{\Omega}} w$$

Θα αποδείξουμε ότι $\max_{\partial\underline{\Omega}} w \le 0$

Έστω πως δεν αληθεύει, δηλαδή $\exists\, x_0 \in \partial\underline{\Omega}$ $\max_{\partial\underline{\Omega}} w = w(x_0) > 0$



$\vec{\eta} = x_0 - x = t\cdot \nu$

$$\left.\begin{array}{l} w(x) \le w(x_0) \\ x = x_0 - t\nu \quad , \ t>0 \end{array}\right| \Rightarrow \overbrace{w(x_0 - t\nu)}^{f(t)} \le \overbrace{w(x_0)}^{f(0)}$$

$0<t$ μικρό

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} \le 0 \Rightarrow f'(0) \le 0$$

Ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$f'(t) = \nabla w\,(x_0 - tv)\cdot(-v)$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial v}(x_0 - tv)$$

οπότε $-\frac{\partial w}{\partial v}(x_0) \le 0 \iff \frac{\partial w}{\partial v}(x_0) \ge 0.$

Όμως έχουμε: $w(x_0) > 0$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial v}(x_0) + w(x_0) > 0$

Αντίφαση!, αφού $\frac{\partial w}{\partial v} + w = 0$, $\partial\Omega$

Άρα $w(x) \le 0$, $x \in \Omega$.

Αντίστοιχα από Αρχή Ελαχίστου $w(x) \ge 0$, $x \in \Omega$.

Οπότε $w(x) = 0$, $x \in \Omega$

Άτοπο

22.5.2012

1) Ενέργεια

2) Green

3) Αρχη Ελαχιστου

4). Σειρές Fourier

1). • $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$$E(t) = \int_a^{\beta} F(u, u_t, u_x)\, dx$$

→ ολοκληρώνουμε ως προς τη χωρική μεταβλητή

Είναι μια εξίσωση του χρόνου

$$E'(t) = \int_a^{\beta} \left[F_u u_t + F_{u_t} u_{tt} + (F_{u_x})_x u_t\right] dx$$

Ένας τρόπος:

Όποια κι αν είναι η ΔΕ την πολ/με με u_t και την ολοκληρώνουμε ως προς τη χωρική μεταβλητή.

• $u_t = u_{xx}$, $0<x<1$

$$\int_0^1 u^2(x,t)\, dx$$

η γενικά,

$$\int_0^1 |u(x,t)|^p\, dx \quad , \ p > 1$$

$$\int_0^1 |u_x(x,t)|^p\, dx$$

αποτελούν ενέργεια.

Άσκηση 5/Πρόοδος

$$u_{tt}(x,t) - u_{xxt t}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad , \; 0<x<1 \; , \; t>0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array}\right. \quad , \; 0\leq x\leq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x(0,t) = h(t) \\ u_x(1,t) = g(t) \end{array}\right. \quad , \; t\geq 0$$

Θα εφαρμόσουμε την Απαγωγή σε Άτοπο.
Υποθέτουμε ότι το Πρόβλημα έχει 2 διακεκριμένες λύσεις u_1, u_2 και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Όντως θέτουμε $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $0\leq x\leq 1$, $t\geq 0$

Τότε η w λύνει το πρόβλημα

$$w_{tt} - w_{xxtt} - w_{xx} = 0 \quad , \; 0<x<1 \; , \; t>0$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0 \quad , \; 0\leq x\leq 1$$

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 \quad , \; t\geq 0$$

Πολ/με με w_t την εξίσωση:

$$w_t \cdot w_{tt} - w_t \cdot w_{xxtt} - w_t \cdot w_{xx} = 0$$

και ολοκληρώνουμε ως προς x.

$$\int_0^1 \left[w_t \cdot w_{tt} - w_t \cdot w_{xxtt} - w_t \cdot w_{xx} \right] dx = 0$$

$$\int_0^1 w_t \cdot w_{tt}\, dx - \int_0^1 w_t \cdot w_{xxtt}\, dx - \int_0^1 w_t \cdot w_{xx}\, dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 w_t^2(x,t)\, dx - \left[- \int_0^1 w_{xt}\, w_{xtt}\, dx + \cancel{(w_t \cdot w_{xtt})}\Big|_0^1 \right] - \left[- \int_0^1 w_{xt} \cdot w_x\, dx + \cancel{(w_t\, w_x)}\Big|_0^1 \right] = 0$$

$w_x(1,t)=0$

$\Downarrow$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(w_x(1,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}(0)$

$\Rightarrow \quad w_{xt}(1,t) = 0$

$\Downarrow$

$\underline{w_{xtt}(1,t) = 0}$ Παρόμοια, έχουμε $\underline{w_{xtt}(0,t)=0}$.

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,t)\,dx + \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 w_{xt}^2(x,t)\,dx + \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 (w_t^2 + w_x^2)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 w_{xt}^2\,dx}_{E(t)}\Big] = 0$$

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[w_t^2\cancel{(x,0)}^{0} + w_x^2\cancel{(x,0)}^{0} + w_{xt}^2\cancel{(x,0)}^{0}\Big]\,dx = 0$$

$\Rightarrow \quad w_t = w_x = w_{xt} = 0$

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής

$w(x,t) - w(x,0) = (t-0)\, w_t(x,\xi_t) = 0$

$\Rightarrow \quad w(x,t) = w(x,0) = 0$

$\Rightarrow \quad w(x,t) = 0$

<u>Άτοπο</u>

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \nabla w \equiv 0$$

$$\Rightarrow w = \text{σταθερό}$$

$$w(x) = c, \quad \forall x \in \Omega$$

όμως στο $\partial\Omega$, $w(x) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow w(x) \equiv 0, \quad \Omega$$

<u>Ατοπο</u>

<u>Άσκηση 6 / πρόοδος</u>

$$u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xt} - \cos^2 x \cdot u_{tt} - \cos x \cdot u_t = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

(x_0, t_0): $t - \cos x - x = t_0 - \cos x_0 - x_0 \quad (c_1)$

$t - \cos x + x = t_0 - \cos x_0 + x_0 \quad (c_2)$

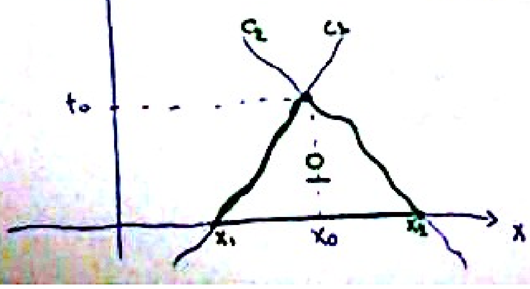
Απαγωγή σε Άτοπο

Έστω u_1, u_2 δυο διακεκριμένες λύσεις

και $w = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Τότε η w λύνει

το πρόβλημα: $w_{xx} - 2\sin x \, w_{xt} - \cos^2 x \, w_{tt} - \cos x \cdot w_t = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$



$\underline{\underline{x_1 < x_2}}$

$$\frac{dt}{dx} + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 - \sin x \geq 0$$

$$\frac{dt}{dx} + \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -(1+\sin x) \leq 0$$

$$\int_{\Omega} \left[\underline{w_{xx}} - \underline{2\sin x \; w_{xt}} - \cos^2 x \; w_{tt} - \underline{\cos x \; w_t} \right] dx\,dt = 0 .$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[w_x - 2\sin x \; w_t \right] = w_{xx} - 2\sin x \cdot w_{tx} - 2\cos x \cdot w_t \right)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[w_x - 2\sin x \; w_t\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\cos^2 x \; w_t\right] + \cos x \; w_t \right) dx\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[w_x - 2\sin x \; w_t\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\cos^2 x \; w_t - \cos x \cdot w\right] \right) dx\,dt = 0$$

Green

$$\Rightarrow \oint_{\partial\Omega} \left[(w_x - 2\sin x \; w_t)\,dt + (\cos^2 x \cdot w_t - \cos x \cdot w)\,dx \right] = 0 \quad (1)$$

Το ολοκλήρωμα στη βάση (για $t=0$) είναι μηδέν.

Άρα θα σπάσουμε το $\partial\Omega$ στο $C_1 \cup C_2$.

<u>Στο C_1.</u>

$$\int_{C_1} (w_x - 2\sin x \; w_t)\,dt + (\cos^2 x \; w_t - \cos x \cdot w)\,dx$$

$$\boxed{dt + (\sin x - 1)\,dx = 0}$$

$$(dw = w_x\,dx + w_t\,dt)$$

$$\int_{C_1} \left[w_x \cdot dt - 2\sin x \cdot w_t \, dt + \cos^2 x \; w_t \, dx - \cos x \cdot w \, dx \right]$$

$$= \int_{C_1} \left[-(\sin x - 1)\, w_x \, dx - 2\sin x \cdot w_t \, dt - \frac{\cos^2 x}{\sin x - 1} w_t \, dt - \cos x \cdot w \, dx \right]$$

$$-\left[2\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x - 1}\right] = -\left[\frac{2\sin^2 x - 2\sin x + \cos^2 x}{\sin x - 1}\right] = \frac{-1 + \sin^2 x - 2(\sin x - 1)}{\sin x - 1}$$

$$= 2 - \frac{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}{\sin x - 1} = 2 - \sin x - 1 = 1 - \sin x.$$

Οπότε,

$$\int_{C_1} \Big[\underbrace{(1-\sin x)\, w_x\, dx + (1-\sin x)\, w_t\, dt}_{(1-\sin x)\, dw} - \cos x \cdot w\, dx \Big] - \cos x \cdot w\, dx$$

$$\Big(d[(1-\sin x) w] = (1-\sin x)\, dw - \cos x \cdot w\, dx \Big)$$

$$= \int_{C_1} d\big((1-\sin x) w\big) = \underline{\underline{-(1-\sin x_0)\cdot w(x_0, t_0)}}$$

<u>Στο C_2</u>:

$$\int_{C_2} (w_x - 2\sin x \cdot w_t)\, dt + (\cos^2 x \cdot w_t - \cos x\, w)\, dx$$

$$\boxed{dt + (\sin x + 1)\, dx = 0}$$

$$\big(dw = w_x\, dx + w_t\, dt \big)$$

$$\int_{C_2} \big[w_x\, dt - 2\sin x\, w_t\, dt + \cos^2 x \cdot w_t\, dx - \cos x\, w\, dx \big]$$

$$= \int_{C_2} \Big[-w_x (1+\sin x)\, dx - 2\sin x \cdot w_t\, dt - \frac{\cos^2 x}{\sin x + 1} w_t\, dt - \cos x \cdot w\, dx \Big]$$

$$-\left[2\sin x + \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\right] = \dots = -(1+\sin x).$$

Οπότε,

$$-\int_{C_2} \big[(1+\sin x)(w_x\, dx + w_t\, dt) + \cos x \cdot w\, dx \big]$$

$$= -\int_{C_2} d\big((1+\sin x) w\big) = \underline{\underline{-(1+\sin x_0)\, w(x_0, t_0)}}$$

άρα ① = $-(1-\sin x_0)\, w(x_0, t_0) - (1+\sin x_0)\, w(x_0,t_0) =$

$= -2w(x_0, t_0) = 0$

$\Rightarrow \quad w \equiv 0.$

Αρχή μεγίστου

Ω φραγμένο $\quad u_t - \Delta u \le 0 \quad , \Omega \times [0,T]$

$$u \in C^0(\Omega \times [0,T])$$

$\boxed{\text{Παραβολικά}}$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega} \times [0,T]} u = \max_{(\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])} u$$

Ω φραγμένο $\quad \Delta u \ge 0 \quad$ (κυρτή)

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

$\boxed{\text{Ελλειπτικά}}$

κυρτές μέγιστη τιμή στα άκρα

Άσκηση 3 | Φυλλάδιο 9

$u_t = u_{xx} \quad , \quad x \in (0,1) \quad t > 0$

$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0$

$u(x,0) = 4x(1-x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le u(x,t) \le 1 \quad , \forall t \in \mathbb{R}$

$u \ge 0 \rightarrow$ Αρχή Ελαχίστου , παραβολικό πρόβλημα

Επιλέγω τυχαία ένα $T > 0$, τότε αφού η διαφορική εξίσωση είναι παραβολικού τύπου ισχύει η αρχή ελαχίστου

και έχουμε $\min\limits_{[0,1] \times [0,T]} u = \min\limits_{([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times [0,T])} u$

όμοιως έχουμε $\min_{U} u = 0 \Rightarrow \min_{[0,1]\times[0,T]} u = 0 \Rightarrow u(x,t) \geq 0$, $t\in[0,T]$

όμοια από αρχή Μεγίστου

$$\max_{[0,1]\times[0,T]} u = \max_{U} u = 1$$

$$\Rightarrow u(x,t) \leq 1 \quad , \forall x\in[0,1] , t\in[0,T]$$

Fourier

f 2π περιοδική

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad , k=0,1,2,\dots$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad , k=1,2,\dots$$

1°). Αν $f \in L^2[0,2\pi] \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$

Ανισότητα Bessel $\quad \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + \beta_k^2)\right) \leq \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$

Ταυτότητα Parseval $\quad \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + \beta_k^2)\right) = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$

2°). Πως σχετίζεται η f με τη σειρά Fourier αυτής?

a). f C^1, 2π περιοδική

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = f(x) \quad , \forall x\in\mathbb{R}$$

β) Αν η f είναι κατά τμήματα C^1

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

αν $x = 0$ ή 2π

$$\frac{f(0^+) + f(2\pi^-)}{2}$$

3°). Αν $f \in C^1$, 2π περιοδική $\Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = f(x)$ ομοιόμορφα $[0, 2\pi]$

Άσκηση 4 / Φυλλάδιο 8

$f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π περιοδική $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

ΝΔΟ $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2\,dx$

Είναι $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ταυτότητα Parseval: $\pi\left(\overset{0}{\cancel{\frac{a_0^2}{2}}} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + \beta_k^2)\right) = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$

Επομένως, $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + \beta_k^2)$

__Ερώτηση:__ Μπορώ να εκφράσω αντίστοιχα το $\int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$?

Ειδικότερα, ποια είναι η σειρά Fourier της f'

Έστω $f' \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \underbrace{\cancel{(f(x) \cos kx)\Big|_0^{2\pi}}}_{0} + k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$\Rightarrow \underline{A_k = + k B_k}$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \, dx = \frac{1}{\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0.$$

Ομοίως $\underline{B_k = - k a_k}$.

__Άσκηση 4 || Φυλλάδιο 9__

$f \quad \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \quad C^1$ συνάρτηση

$f(x,y) \leq f(1,0) \quad , x^2 + y^2 \leq 1$

$\Rightarrow f_x(1,0) \geq 0$

$f_y(1,0) = 0.$

Στη μία μεταβλητή

$g: [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g \in C^1[0,1]$

$g(x) \leq g(1)$

$\Rightarrow g'(1) \geq 0$

$(\cos\theta, \sin\theta)$

θετικη τετμημενη, θετικη τεταγμενη

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$(x,y) \Rightarrow g(t) = -t(\cos\theta, \sin\theta) \quad , 0 < t < 1$

αρα $f\big((1,0) - t(\cos\theta, \sin\theta)\big) = g(t)$

$\Rightarrow g(t) = f(1 - t\cos\theta, 1 - t\sin\theta)$

$g(t) \leq g(0) \quad , t \in (0,1)$

$\Downarrow$

$g'(0) \leq 0$

$g'(t) = \frac{df}{dx}(1 - t\cos\theta, 1 - t\sin\theta)(-\cos\theta) + \frac{df}{dy}(1 - t\cos\theta, 1 - t\sin\theta)(-\sin\theta)$

$g'(0) = f_x(1,0) \cdot (-\cos\theta) + f_y(1,0)(-\sin\theta)$

$= -\cos\theta f_x(1,0) - \sin\theta \cdot f_y(1,0) \leq 0$

$\Rightarrow \cos\theta f_x(1,0) + \sin\theta \cdot f_y(1,0) \geq 0$

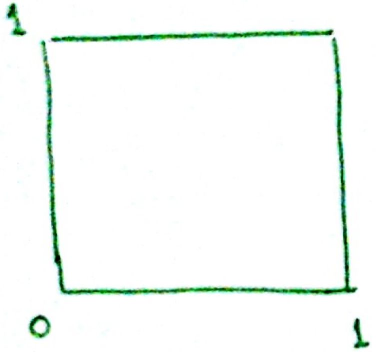
$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{ll} \theta = \frac{\pi}{2} & f_y(1,0) \geq 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & -f_y(1,0) \geq 0 \end{array}\right\} \quad f_y(1,0) = 0$$

στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \cos\theta \geq 0$ και $\cos\theta \cdot f_x(1,0) \geq 0$

άρα $f_x(1,0) \geq 0$.

Άσκηση



$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$f \in C^1([0,1]\times[0,1])$

α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(x,y) \leq f(1, \frac{1}{2})$, $x, y \in [0,1]$ τι συμπέρασμα έχουμε για την παράγωγο;

β) Αν γνωρίζουμε ότι $f(x,y) \leq f(1,1)$ τι συμπέρασμα έχουμε?