Πέμπτη 8 Μαρτίου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 3

1). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \; - \; c^2\, u_{xx}(x,t) \; &= \; 0, \;\; x > 0, \; t > 0, \\ u(x,0) \; &= \; x^3, \;\; x > 0, \\ u_t(x,0) \; &= \; 0, \;\; x > 0, \\ u(0,t) \; &= \; 0, \;\; t > 0. \end{aligned}$$

2). Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \; - \; c^2\, u_{xx}(x,t) \; &= \; f(x,t), \;\; 0 < x < 1, \; t > 0, \\ u(x,0) \; &= \; \phi(x), \;\; 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) \; &= \; \psi(x), \;\; 0 < x < 1, \\ u(0,t) \; &= \; h_1(t), \;\; t > 0, \\ u(1,t) \; &= \; h_2(t), \;\; t > 0, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

3). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \; - \; u_{xt}(x,t) \; &= \; f(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\ u(x,0) \; &= \; 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) \; &= \; 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

4). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$\begin{aligned} 2u_{xx}(x,t) \; - \; u_{tt}(x,t) \; + u_{xt}(x,t) \; &= \; f(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\ u(x,0) \; &= \; 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) \; &= \; 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση.

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 15 Μαρτίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 15 Μαρτίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Φυλλάδ. 3

Λύσεις

1)

Από την θεωρία ξέρουμε ότι για λύσουμε το πρόβλημα, επειδή έχουμε Dirichlet συνθήκες στο $(0,t)$ κανουμε περιττη επεκταση της συνάρτησης $\varphi(x)=x^3$, $x\geq 0$. Δηλαδη η $\varphi_\pi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$

$= x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

Η λυση του προβληματος

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=0 \quad , x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$v(x,0)=\varphi_\pi(x)=x^3 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$
$$v_t(x,0)=0 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

δινεται απο τον τυπο $v(x,t)=\frac{1}{2}\left((x+ct)^3+(x-ct)^3\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}0\,d\tau$

$$=\frac{1}{2}\left(x^3+\cancel{3cx^2t}+3c^2xt^2+\cancel{c^3t^3}+x^3-\cancel{3cx^2t}+3c^2xt^2-\cancel{c^3t^3}\right)$$

$$=x^3+3c^2xt^2 \quad , \quad x\in\mathbb{R},\ t>0.$$

Οποτε η λυση του αρχικου προβληματος ειναι

$$u(x,t)=v(x,t)=x^3+3c^2xt^2, \quad x>0,\ t>0.$$

---

2) Εστω u_1, u_2 δυο διαφορετικες λυσεις του προβληματος. Θεωρουμε $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$, $x\in[0,1]$, $t\geq 0$. Τοτε η w λυνει το προβλημα

$$w_{tt}-c^2w_{xx}=0, \quad x\in(0,1),\ t>0$$
$$w(x,0)=0, \quad x\in[0,1]$$
$$w_t(x,0)=0, \quad x\in[0,1]$$
$$w(0,t)=w(1,t)=0, \quad t\geq 0.$$

Θεωρούμε τη ενέργεια του συστήματος

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t) \right] dx \ , \quad t \geq 0.$$

Τότε έχουμε $E'(t) = \int_0^1 \left[w_t w_{tt} + c^2 w_x w_{xt} \right] dx$

$$= \int_0^1 \left[w_t w_{tt} + c^2 w_x w_{tx} \, dx \right.$$

$$= \int_0^1 \left[w_t w_{tt} - c^2 w_{xx} w_t \right] dx + c^2 (w_x w_t)\Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \left[w_{tt} - c^2 w_{xx} \right] w_t \, dx + c^2 \left(w_x(1,t) w_t(1,t) - w_x(0,t) w_t(0,t) \right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{0}$$

Όμως $w(1,t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} w(1,t) = 0$. Παρόμοια $w_t(0,t) = 0$

και τελικά $E'(t) = 0 \ , \quad t \geq 0$.

Άρα $E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0) \right] dx = 0$, λόγω των αρχικών δεδομένων.

Οπότε $E(t) = 0$ και επομένως $w_t \equiv 0$, $w_x \equiv 0$ στο $[0,1] \times [0,\infty)$.

και τελικά επειδή, $\exists \ \xi_t \in (0,t)$:

$$w(x,t) - w(x,0) = (t-0)\, w_t(x, \xi_t) = 0$$

προκύπτει $w \equiv 0$ που είναι άτοπο. /

Το πρόβλημα είναι υπερβολικού τύπου.

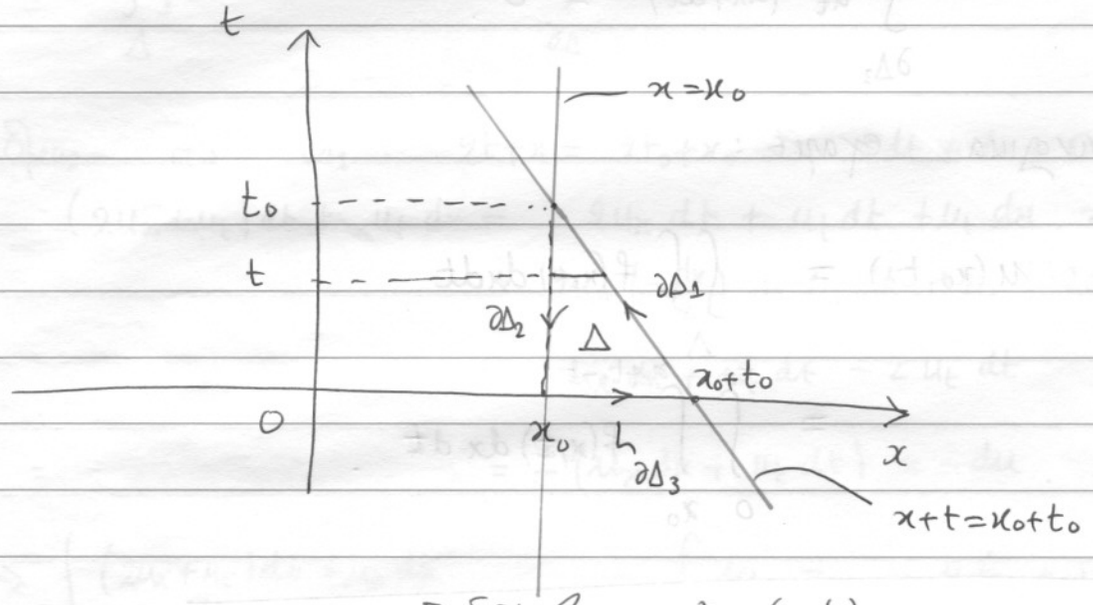
3) Υπάρχουν δύο χρόνοι για αυτό το πρόβλημα:

1ο) Αλλαγή συνοριακών συνθηκών και στα σύνορα θαλάσσης, όπως μιλάμε στον υπολογιστικό εξίσωση.

2) Χρήση της ταυτότητας του Green, σε κατάλληλο χωρίο, που ορίζουν οι χαρακτηριστικές καμπύλες.

Θα αποδείξουμε με μέθοδο κατάλληλη χρήση της ταυτότητας του Green, που δίνει το αποτέλεσμα σχετικά απλά.

Από την σκοπιά για τη μέθοδο, είναι η ύπαρξη των χαρακτηριστικών καμπύλων, αυτό θα δούμε στο κεφάλαιο 2.



Οι χαρακτηριστικές καμπύλες στην διεύθυνση απ. τ. (x_0,t_0) είναι $x=x_0$ & $x+t=x_0+t_0$ (όπως στο σχήμα).

Ταυτότητα του Green στο Δ δίνει

$$\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right]dx\,dt = \int_{\partial\Delta}\left[Q\,dt+P\,dx\right].$$

επιλέγουμε $Q(x,t)=-u_t(x,t)$ και $P(x,t)=-u_t(x,t)$, οπότε

$$\iint_{\Delta}\left[-u_{xt}(x,t)+u_{tt}(x,t)\right]dx\,dt = \int_{\partial\Delta}\left[-u_t(x,t)\,dt-u_t(x,t)\,dx\right]$$

$$\Rightarrow -\int_{\partial\Delta}\left[u_t(x,t)\,(dt+dx)\right. = \iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt.$$

Όμως στο $\partial\Delta_1$: $x+t=x_0+t_0 \Rightarrow dx+dt=0$, οπότε $\int_{\partial\Delta_1} u_t\,(dx+dt)=0$.

4) στο $\partial\Delta_2$: $x = x_0 \Rightarrow dx = 0$, οπότε

$$\int_{\partial\Delta_2} u_t(x,t)(dx+dt) = \int_{\partial\Delta_2} u_t(x,t)\,dt = \int_{\partial\Delta_2} du$$

(πρόσοχη στον προσανατολισμό!)

$$= u(x_0,t_0) - u(x_0,t_0) = -u(x_0,t_0).$$

Στο δε $\partial\Delta_3$: $t=0$, $(u=0)$, $u_t = 0$ οπότε

$$\int_{\partial\Delta_3} u_t\,(dx+dt) = 0.$$

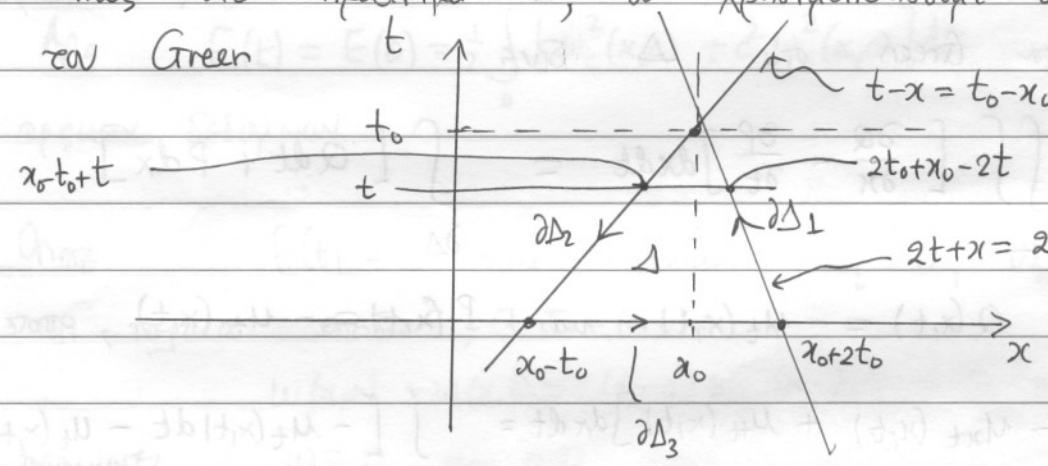
Οπότε συνολικά έχουμε:

$$u(x_0,t_0) = \iint_{\Delta} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \int_0^{t_0}\int_{x_0}^{x_0+t_0-t} f(x,t)\,dx\,dt.$$

---

4) Όπως στο πρόβλημα 3, θα χρησιμοποιήσουμε τον ταυτότητα του Green



υπό τη φορά οι χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από το (x_0,t_0) είναι $t-x = t_0-x_0$ και $2t+x = 2t_0+x_0$ (όπως στο σχήμα).

Από τη φορά επιλέγουμε $Q(x,t) = 2u_x(x,t) + u_t(x,t)$ & $P(x,t) = u_t(x,t)$

οπότε αφού
$$\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right]dx\,dt=\int_{\partial\Delta}\left[Q\,dt+P\,dx\right].$$

Έχουμε
$$\iint_{\Delta}\left[2u_{xx}+u_{tx}-u_{tt}\right]dx\,dt=\int_{\partial\Delta}\left[(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx\right].$$
$$\Updownarrow$$
$$\iint_{\Delta}f(x,t)\,dx\,dt=\int_{\partial\Delta}\left[(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx\right].$$

Θέτω στο $\partial\Delta_1$: $2t+x=2t_0+x_0 \Rightarrow 2dt+dx=0$, οπότε
$$(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx=2u_x\,dt+u_t\,dt+u_t\,dx=$$
$$=2u_x\left(-\frac{dx}{2}\right)+u_t\,dt+u_t(-2dt)$$
$$=-u_x\,dx+u_t\,dt-2u_t\,dt$$
$$=-(u_x\,dx+u_t\,dt)=-du.$$
$$\Rightarrow\int_{\partial\Delta_1}(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx=-\int_{\partial\Delta_1}du=-u(x_0,t_0)+u(x_0+t_0,0)$$
$$=-u(x_0,t_0).$$

Στο $\partial\Delta_2$: $t-x=t_0-x_0 \Rightarrow dt-dx=0$, οπότε
$$(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx=2u_x\,dt+u_t\,dt+u_t\,dx$$
$$=2u_x\,dx+u_t\,dt+u_t\,dt$$
$$=2(u_x\,dx+u_t\,dt)=2\,du$$
$$\Rightarrow\int_{\partial\Delta_2}(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx=\int_{\partial\Delta_2}2\,du=2u(x_0-t_0,0)-2u(x_0,t_0)$$
$$=-2u(x_0,t_0)$$

Στο $\partial\Delta_3$: $t=0$, $u=0\Rightarrow u_x=0$ & $u_t=0$, οπότε $\int_{\partial\Delta_3}(2u_x+u_t)dt+u_t\,dx=0$.

και τελικά έχουμε: $u(x_0,t_0)=-\frac{1}{3}\iint_{\Delta}f(x,t)\,dx\,dt=-\frac{1}{3}\int_0^{t_0}\int_{x_0-t_0-t}^{2t_0+x_0-2t}f(x,t)\,dx\,dt$