Πέμπτη 15 Μαρτίου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 4

1). Αποδείξτε με τη μέθοδο της ενέργειας ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) &= 0, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u_x(0,t) &= g(t), \quad t > 0, \\ u(1,t) &= h(t), \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

2). Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xxx}(x,t) &= f(x,t), \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= h(t), \quad t > 0, \\ u_{xx}(0,t) &= H(t), \quad t > 0, \\ u_x(1,t) &= g(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

3). Αποδείξτε με χρήση της ταυτότητας του *Green* ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - e^x u &= f(x,y), \quad x^2+y^2 < 1, \\ u(x,y) &= g(x,y), \quad x^2+y^2 = 1, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

4). Αποδείξτε με τη μέθοδο της ενέργειας ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= f(x,t), \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) &= h(t), \quad t > 0, \\ u(1,t) &= g(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι ομαλές.

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 22 Μαρτίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 22 Μαρτίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Φυλλάδιο 4

19-3-2012

(1

ΛΥΣΕΙΣ

1) Έστω ότι το πρόβλημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις u_1, u_2.
Τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα:

$$w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) - w_x(x,t) = 0, \quad 0<x<1,\ t>0$$

$$w_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$w(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$w(x,0) = 0, \quad 0<x<1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx, \quad t \geq 0.$

Τότε $E'(t) = \int_0^1 w(x,t)\, w_t(x,t)\,dx =$ από τη Δ.Ε.

$$= \int_0^1 w(x,t)\left[w_{xx}(x,t) + w_x(x,t)\right]dx$$

$$= \int_0^1 w(x,t)\left[w_x + w\right]_x dx$$

$$= -\int_0^1 w_x(x,t)\left(w_x(x,t) + w(x,t)\right)dx + \left(w(x,t)\left(w_x + w\right)\right)\Big|_0^1$$

$$= -\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx - \int_0^1 w(x,t)\,w_x(x,t)\,dx + \cancel{w(1,t)}^{\,0}\left(w_x(1,t) + w(1,t)\right) - w(0,t)\left(\cancel{w_x(0,t)}^{\,0} + w(0,t)\right)$$

$$= -\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}w^2(x,t)\right)_x dx - w^2(0,t)$$

$$= -\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}w^2(1,t) + \frac{1}{2}w^2(0,t) - w^2(0,t)$$

$$= -\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\left(w^2(1,t) + w^2(0,t)\right) \leq 0, \quad t \geq 0$$

2) Οπότε η E φθίνουσα, και άρα για $t>0$

$$E(t) \leq E(0) = 0$$

$\Longrightarrow$ $w(x,t) = 0$, ατοπο.

---

2) Έστω u_1, u_2 δύο διαφορετικές λύσεις, τότε η $w = u_1 - u_2$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{aligned} w_t(x,t) - w_{xxx}(x,t) &= 0, && 0<x<1,\ t>0 \\ w(x,0) &= 0, && 0<x<1 \\ w_x(0,t) = w_x(1,t) &= 0, && t>0. \\ w_{xx}(0,t) &= 0, && t>0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx, \quad t \geq 0. \quad \text{Τότε}$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^1 w_x(x,t)\, w_{xt}(x,t)\,dx \\ &= -\int_0^1 w_{xx}(x,t)\, w_t(x,t)\,dx + \left(w_x(x,t)\, w_t(x,t)\right)\Big|_0^1 \\ &= -\int_0^1 w_{xx}(x,t)\, w_{xxx}(x,t)\,dx + \cancel{w_x(1,t)\, w_t(1,t)}^{\,0} - \cancel{w_x(0,t)\, w_t(0,t)}^{\,0} \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(w_{xx}^2(x,t)\right)_x dx \\ &= -\frac{1}{2}\, w_{xx}^2(1,t) + \frac{1}{2}\, \cancel{w_{xx}^2(0,t)}^{\,0} \\ &= -\frac{1}{2}\, w_{xx}^2(1,t) \leq 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Οπότε για $t>0$, $E(t) \leq E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 w_x^2(x,0)\,dx$.

Όμως εφόσον $w(x,0) = 0 \Longrightarrow w_x(x,0) = 0$, οπότε $E(0) = 0$.

και έτσι προκύπτει ότι $E(t)=0 \Rightarrow w_x(x,t)=0,\ x\in[0,1],\ t>0.$

$$\Rightarrow w_{xxx}(x,t)=0 \overset{\Delta.E.}{\Rightarrow} w_t(x,t)=0.$$ Και επομένως

$\exists\ \xi_t\in(0,t):$

$$w(x,t)-\underbrace{w(x,0)}_{=0}=(t-0)\,w_t(x,\xi_t)=0$$

$$\Rightarrow w(x,t)\equiv 0,\quad x\in[0,1],\ t\geq 0.$$ ΑΤΟΠΟ

---

3). Έστω u_1, u_2 δύο διαφορετικές λύσεις, τότε η

$w(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ λύνει το πρόβλημα

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right)-e^x w=0,\quad x^2+y^2<1$$

$$w(x,y)=0,\quad x^2+y^2=1.$$

Πολλαπλασιάζουμε την Δ.Ε με w και ολοκληρώνουμε στο $x^2+y^2\leq 1$, οπότε παίρνουμε:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left[w\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+w\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right)-e^x w^2\right]dx\,dy=0.$$

Όμως $$\iint_{x^2+y^2\leq 1} w\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy=-\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\partial w}{\partial x}(1+x^2)\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy$$

$$+\cancel{\int_{x^2+y^2=1} w(1+x^2)\frac{\partial w}{\partial \nu}\,dS}^{\,0}$$

(ολοκλήρωση κατά μέρη).

$$=-\iint_{x^2+y^2\leq 1}(1+x^2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\,dy$$

4) Πράγματι έχουμε:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} w \frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint_{x^2+y^2\le 1}(1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

$$+\int_{x^2+y^2=1} \cancel{w}^{\,0}\,(1+x^2+y^2)\frac{\partial w}{\partial \nu}\, dS$$

Οπότε τελικά παίρνουμε ότι ισχύει:

$$-\iint_{x^2+y^2}\left[(1+x^2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+(1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+e^x w^2\right]dx\,dy = 0$$

από όπου προκύπτει ότι $w\equiv 0$, $x^2+y^2\le 1$, ΑΤΟΠΟ

---

4) Έστω u_1, u_2 δύο διαφορετικές λύσεις του προβλήματος. Τότε η $w = u_1-u_2$ λύνει το πρόβλημα:

$$w_{tt}(x,t) - w_{xxt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, \quad 0<x<1,\ t>0$$
$$w(x,0) = 0 \quad ,0<x<1$$
$$w_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0<x<1$$
$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t>0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[w_x^2(x,t) + w_t^2(x,t)\right]dx, \quad t\ge 0.$$

Τότε

$$E'(t) = \int_0^1 \left[w_x w_{xt} + w_t w_{tt}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[-w_{xx} w_t + w_t w_{tt}\right]dx + (w_x w_t)\Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \left[w_{tt} - w_{xx} \right] w_t \, dx + w_x(1,t)\, w_t(1,t) - w_x(0,t)\, w_t(0,t)$$

δηλαδή αφού $w(0,t) = 0 \Rightarrow w_t(0,t) = 0$

$w(1,t) = 0 \Rightarrow w_t(1,t) = 0$

οπότε

$$E'(t) = \int_0^1 \left[w_{tt} - w_{xx} \right] w_t \, dx \overset{\Delta.E.}{=} \int_0^1 w_{xxt}(x,t)\, w_t(x,t)\, dx$$

$$= - \int_0^1 w_{xt}^2(x,t)\, dx + \left(w_{xt}(x,t)\, w_t(x,t) \right) \Big|_0^1$$

$$= - \int_0^1 w_{xt}^2(x,t)\, dx + w_{xt}(1,t) \underbrace{\cancel{w_t(1,t)}}_{0} - w_{xt}(0,t) \underbrace{\cancel{w_t(0,t)}}_{0}$$

$$= - \int_0^1 w_{xt}^2(x,t)\, dx \leq 0 \, , \quad t > 0 .$$

Επομένως για $t > 0$

$E(t) \leq E(0) = 0$

$\Rightarrow w_x \equiv 0, \; w_t \equiv 0 \Rightarrow w(x,t) = w(x,0) = 0$

δηλ. $w \equiv 0$, <u>ατοπο</u>