Πέμπτη 22 Μαρτίου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 5

1). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x > 0, \; t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x > 0,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

(Η λύση να εκφραστεί σαν ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης).

2). Με την μέθοδο του *Fourier* να βρείτε τη γενική λύση του του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \; t > 0,$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t), \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u_x(2\pi,t), \quad t > 0.$$

3). Με την μέθοδο του *Fourier* να βρείτε τη γενική λύση του του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \; t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

4). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x > 0, \; t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda, \quad x > 0.$$

(Η λύση να εκφραστεί σαν ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης).

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 29 Μαρτίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 29 Μαρτίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Φυλλάδιο 5

ΛΥΣΕΙΣ

27-03-2012

1

1) Επειδή $u_x(0,t)=0$, μπορούμε <u>αρχικά</u> επεκτείνουμε τη f, ευκολότερα θέτοντας

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} f(x), & x\geq 0 \\ f(-x), & x<0 \end{cases}$$

και λύνοντας το πρόβλημα

$$v_t - v_{xx} = 0, \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$v(x,0)= f_\alpha(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

η λύση του οποίου είναι

$$v(x,t)= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{0} f_\alpha(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy + \int_{0}^{\infty} f_\alpha(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{0} f(-y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy + \int_{0}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy\right)$$

με αλλαγή $-y=\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\int_{0}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}dy + \int_{0}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{0}^{\infty} f(y)\left(e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right)dy.$$

Τώρα $u(x,t)=v(x,t)$, $x\geq 0$, $t>0$. (Αρκεί να ικανοποιεί

2 ζη σωστριδιν σιδηνιν. Οντως

$$u_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty f(y) \left[-\frac{2(x+y)}{4t} e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} - \frac{2(x-y)}{4t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right] dy$$

οποτε για $x=0$, εχουμε

$$u_x(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty f(y) \left[-\frac{2y}{4t} e^{-\frac{y^2}{4t}} + \frac{2y}{4t} e^{-\frac{y^2}{4t}} \right] dy$$

$$= 0, \quad t \geq 0.$$

---

2) Ψαχνουμε αρχικα για (απλες) λυσεις στη μορφη

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Τοτε θελουμε

$$T'(t)\,X(x) = X''(x)\,T(t) \iff$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

οποτε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ ωστε

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Επομενως

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

&

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Θελουμε προσεχτικα $u(0,t) = X(0)\,T(t)$ να ισχυει

$$u(0,t) = u(2\pi,t) \Leftrightarrow \left(X(0)-X(2\pi)\right)T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$X(0) = X(2\pi)$$

Πρέπει επίσης

$$u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) \Leftrightarrow \left(X'(0)-X'(2\pi)\right)T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$X'(0) = X'(2\pi).$$

Οπότε έχουμε:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0<x<2\pi$$
$$X(0) = X(2\pi)$$
$$X'(0) = X'(2\pi).$$

(Το πρόβλημα αυτό έχει λυθεί στο μάθημα, το επαναλαμβάνουμε)

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\lambda<0 \Rightarrow$ Χαρακτηριστική εξίσωση $p^2+\lambda=0 \Rightarrow p=\pm\sqrt{-\lambda}$

Οπότε $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $0<x<2\pi$.

Κάνουμε χρήση των συνοριακών συνθηκών, οπότε

$$X(0)=X(2\pi) \Leftrightarrow c_1+c_2 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1\right)c_1 + \left(e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}-1\right)c_2 = 0 \quad (1)$$

$$X'(0)=X'(2\pi) \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}\left(c_1-c_2\right) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1\right)c_1 - \left(e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1\right)c_2 = 0 \quad (2)$$

Τελικά (1), (2) έχει μοναδική λύση τη μηδενική, αφού

$$\det\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1 & e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1 & -\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1\right)\end{pmatrix} = -2\left(e^{\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1\right)\cdot\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi}-1\right) \neq 0 \quad \text{για } \lambda<0.$$

β) $\lambda=0 \Leftrightarrow X''(x)=0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x) = c_1 x + c_2$

$$X(0)=X(2\pi) \Leftrightarrow c_2 = c_1\cdot 2\pi + c_2 \Leftrightarrow c_1 = 0$$
$$X'(0)=X'(2\pi) \Leftrightarrow c_1 = c_1.$$

Δη $X(x) = c_2 \cdot 1$. (μηδενική ιδιοτιμή $\lambda_0=0$, ιδιοσυνάρτηση $X_0(x)=1$)

4) $\lambda > 0 \Rightarrow p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\lambda}\, i$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; $\quad X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, $0 < x < 2\pi$.

$$X(0) = X(2\pi) \Leftrightarrow c_1 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1)\, c_1 + \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)\, c_2 = 0 \quad (3)$$

$$X'(0) = X'(2\pi) \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{\lambda}}\, c_2 = \cancel{\sqrt{\lambda}}\left(-c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)\right) \Leftrightarrow$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)\, c_1 + (1 - \cos(\sqrt{\lambda}\, 2\pi))\, c_2 = 0 \quad (4).$$

$$(3),(4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\, 2\pi) - 1 & \sin(\sqrt{\lambda}\, 2\pi) \\ \sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) & 1 - \cos(\sqrt{\lambda}\, 2\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αλλιώς ανάλυση για τη χρήση των μιγαδικών (πολύπλοκων) και η φράση να είναι μηδέν (πίνακας μη αντιστρέψιμος)

Δηλ. $\det\left(\quad\right) = -\left[(\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) - 1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)\right] = 0$

Άρα $\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_k} = k \Leftrightarrow \lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$

με ιδιοσυναρτήσεις $\cos(kx)$, $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$.

Οπότε καταλαβαίνουμε ότι $\lambda_0 = 0 \longrightarrow u_0(x,t) = 1$

$\lambda_k = k^2 \longrightarrow u_k^1(x,t) = e^{-k^2 t}\cos(kx)$

$u_k^2(x,t) = e^{-k^2 t}\sin(kx)$

και τελικά η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k e^{-k^2 t}\cos(kx) + \beta_k e^{-k^2 t}\sin(kx)\right)$$

3) Θέτουμε $u(x,t) = X(x)T(t)$, τότε έχουμε

$$T''(t)X(x) - (T'(t) + T(t))X''(x) = 0.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

a) $T'(t)+T(t)\equiv 0 \Rightarrow T(t)=e^{-t}$ και τότε πρέπει $X(x)\equiv 0$, δεν παίρνουμε μη τετριμμένη λύση.

b) Αν $T'(t)+T(t)$ δεν ταυτότικα μηδέν, $\Rightarrow$

$$\frac{T''(t)}{T'(t)+T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

οπότε $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{T''(t)}{T'(t)+T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda .$$

δηλ.

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$T''(t)+\lambda\left(T'(t)+T(t)\right)=0$$

Για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες πρέπει

$$u(0,t)=0 \Leftrightarrow X(0)T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0$$

Παρόμοια $X(\pi)=0$.

Οπότε

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad 0<x<\pi$$
$$X(0)=X(\pi)=0$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα, πρέπει $\lambda_k=k^2$, $k\in\mathbb{N}$ και $X_k(x)=\sin kx$.

$k=3 \Rightarrow \rho = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\quad k(k^2-4)$

$e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$, $e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$

$T_1(t) = a_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta_1$

β) $k=2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow T_2(t) = (a_2 t + \beta_2) e^{-2t}$

$k \geq 3 \Rightarrow \Delta = k^2(k^2-4) > 0 \Rightarrow \rho = \frac{-k^2 \pm k\sqrt{k^2-4}}{2}$

$T_k(t) = a_k e^{\frac{-k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t} + \beta_k e^{\frac{-k^2-k\sqrt{k^2-4}}{2}t}$

η γενική λύση είναι:

$u(x,t) = \left(a_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta_1 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) \sin x +$

$(a_2 t + \beta_2) e^{-2t} \sin 2x +$

$\sum_{k=3}^{\infty} \left(a_k e^{\frac{-k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t} + \beta_k e^{-\frac{k^2-k\sqrt{k^2-4}}{2}t}\right) \sin(kx)$

αυθαίρετες a_k, β_k, $k=1,2,\dots$ οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν.

2 δοσμένες συν/νες

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

τότε:

$$T'(t)\,X(x) - T(t)\,X''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Οπότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

και λόγω της συνοριακής συνθήκης πρέπει $X(0)=0$.

Επομένως έχουμε πλέον τα:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x > 0$$
$$X(0) = 0$$

&

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

Επιλύουμε αρχικά τη.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Η χαρακτηριστική ήταν εύκολη $\rho^2 + \lambda = 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\lambda = 0 \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $X(0)=0$ $X(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow X(x) = c_1 x$.

απορρίπτεται αφού η X δεν είναι φραγμένη εκτός εάν $c_1 = 0$

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}, \quad x>0.$$

Θέλω άρα $X(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-c_1$.

Οπότε

$$X(x) = c_1\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \quad x>0$$

η οποία επίσης είναι αρμονική εκτός αν $c_1=0$, που μας δίνει την τετριμμένη λύση.

iii) $\lambda>0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} : X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Επειδή $X(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0$

και επομένως

$$X_\lambda(x) = c_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda>0.$$

και η λύση $T'(t)+\lambda T(t)=0 \Rightarrow T(t)=e^{-\lambda t}$

$$u_\lambda(x,t) = e^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda>0$$

και επειδή $\lambda>0$, ξαναγράφουμε αυτό για λ κι θέτουμε λ^2

οπότε η $e^{-\lambda^2 t}\sin(\lambda x)$, $\lambda>0$, $t>0$, $x>0$

είναι λύση

και η γενική λύση θα μπορούμε να κατασκευάσουμε

από τη μορφή

$$u(x,t) = \int_0^\infty c(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t}\sin(\lambda x)\, d\lambda$$

για κατάλληλη επιλογή συντελεστών $c(\lambda)$, $\lambda>0$.

Για να αποδείξουμε τα αρχικά δεδομένα (η λύση να είναι συνεχής μέχρι $t=0$).

Θα πρέπει

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{1+\lambda^2}\,d\lambda = u(x,0) = \int_0^\infty c(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda \qquad x>0.$$

Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $c(\lambda) = \dfrac{1}{1+\lambda^2}$, $\lambda>0$

(Στην πραγματικότητα αυτή είναι και η μοναδική επιλογή αλλά δεν μας ενδιαφέρει στην πέμπτη φάση).

Άρα έτσι η λύση του προβλήματος είναι η

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2 t}}{1+\lambda^2}\sin(\lambda x)\,d\lambda, \qquad t>0,\ x>0.$$

Τότε θέλω $T_k''(t) + k^2 T_k' + k^2 T_k = 0$

με χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 + k^2\rho + k^2 = 0$

$$\Delta = k^4 - 4k^2 = k^2(k^2-4).$$

α) $k=1 \Rightarrow \Delta = -3 \Rightarrow \rho = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ και έχουμε 2 γραμ. ανεξ. λύσεις

$$e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), \quad e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

$$\cancel{T_1(t)} = \alpha_1 e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta_1 e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

β) $k=2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow T_2(t) = (\alpha_2 t + \beta_2)e^{-2t}$

γ) $k \geq 3 \Rightarrow \Delta = k^2(k^2-4) > 0 \Rightarrow \rho = \frac{-k^2 \pm k\sqrt{k^2-4}}{2}$

$$T_k(t) = \alpha_k e^{\frac{-k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t} + \beta_k e^{\frac{-k^2-k\sqrt{k^2-4}}{2}t}$$

Οπότε η γενική λύση στη μορφή:

$$u(x,t) = \left(\alpha_1 e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta_1 e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\sin x +$$

$$(\alpha_2 t + \beta_2)e^{-2t}\sin 2x +$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty}\left(\alpha_k e^{\frac{-k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t} + \beta_k e^{-\frac{k^2+k\sqrt{k^2-4}}{2}t}\right)\sin(kx)$$

όπου οι σταθερές α_k, β_k, $k=1,2,\dots$ θέλουν προσδιορισμό.

---

4) Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Τότε παρατηρούμε: