Πέμπτη 29 Μαρτίου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 6

1). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$u_{tt}(x,t) + 2u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) + u(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

2). Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 > 1,$$

$$u = 1 + 3\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

u φραγμένη.

3). Βρείτε την αρμονική συνάρτηση u στο μισό δίσκο $r < 1$, $0 < \theta < \pi$, και τέτοια ώστε

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$u(1,\theta) = \pi\sin\theta - \sin 2\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

(Η u είναι σε πολικές συντεταγμένες.)

4). Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \ t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(1,t) + u_t(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Προς τούτο αποδείξτε ότι κάποιο κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές αριθμήσιμες στο πλήθος που συμβολίζουμε με

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots.$$

Αποδείξτε επίσης ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι οι θετικές λύσεις της εξίσωσης

$$\tan\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

και ότι ικανοποιούν την ασυμπτωτική σχέση

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{k\pi} = 1.$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις·

Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος. Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k.

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 5 Απριλίου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 5 Απριλίου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

1) Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή $u(x,t) = X(x)T(t)$, τότε έχουμε

$$X(x)T''(t) + 2X(x)T'(t) - 4X''(x)T(t) + X(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} - 4\frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = 4\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Οπότε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \&$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -4\lambda$$

Επίσης ισχύει $u(x,0) = 0 \Leftrightarrow X(x)T(0) = 0 \Leftrightarrow T(0) = 0$.

$u_x(0,t) = 0 \Leftrightarrow X'(0)T(t) = 0 \Leftrightarrow X'(0) = 0$

$u(1,t) = 0 \Leftrightarrow X(1)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(1) = 0$

Οπότε προκύπτουν τα αποτελέσματα:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$X'(0) = X(1) = 0$$

&

$$T''(t) + 2T'(t) + (1+4\lambda)T(t) = 0$$
$$T(0) = 0.$$

Λύνουμε αρχικά το πρώτο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X(1) = 0.$$

Επειδή η ΔΕ. είναι 2ης τάξης γραμμική με σταθερούς συντελεστές, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\rho^2 + \lambda = 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) $\lambda < 0 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda}$, και παίρνουμε $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $x \in [0,1]$.

Άρα $X(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1$ & $X(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \Leftrightarrow$

$c_1(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0 \Leftrightarrow c_1(\underbrace{e^{2\sqrt{-\lambda}} - 1}_{\neq 0}) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 = c_2$, δηλ. $X(x) \equiv 0$.

ii) Αν $\lambda = 0 \Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x) = c_1 x + c_2$. $X(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$, $X(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0$ $\Big| \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$.

iii) $\lambda > 0 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$, $x \in [0,1]$.

$X(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$ & $X(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0$ (γιατί διαφορετικά η λύση θα ήταν η τετριμμένη) $\Leftrightarrow \sqrt{\lambda} = (k-1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = 1, 2, \dots$

οπότε $\sqrt{\lambda_k} = k\pi - \frac{\pi}{2}$ $k = 1, 2, \dots$ $\Leftrightarrow \lambda_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2$, $k = 1, 2, \dots$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}x) = \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)$, $k = 1, 2, \dots$

Στη συνέχεια για $\lambda = \lambda_k$, λύνουμε το πρόβλημα

$$T_k'' + 2T_k' + (1 + 4\lambda_k)T_k = 0$$
$$T_k(0) = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\rho^2 + 2\rho + 1 + 4\left(k - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 = 0$.

$$\Delta = 4 - 4 - 16\left(k - \tfrac{1}{2}\right)^2\pi^2$$
$$= -\left(4\left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi\right)^2$$

οπότε $\rho = \dfrac{-2 \pm 4\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi i}{2} = -1 \pm 2\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi i = -1 \pm (2k-1)\pi i$.

και επομένως $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $T_k(t) = c_1 e^{-t}\cos(2k-1)\pi t + c_2 e^{-t}\sin(2k-1)\pi t$.

όμως $T_k(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Rightarrow T_k(t) = c_2 e^{-t}\sin((2k-1)\pi t)$, $t \geq 0$.

Οι λύσεις του αρχικού προβλήματος είναι $u_k(x,t) = e^{-t}\sin((2k-1)\pi t)\cdot\sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)$ $k = 1, 2, \dots$

και η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-t}\sin((2k-1)\pi t)\sin\left(\left(k - \tfrac{1}{2}\right)\pi x\right)$$

όπου οι σταθερές c_k, $k \in \mathbb{N}$ είναι υπό προσδιορισμό.

---

2) Η Δ.Ε. σε πολικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή: $(u(x,y) = U(\rho,\theta))$

$$U_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0, \quad \rho > 1, \ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

$$U(1,\theta) = 1 + 3\sin\theta \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

3) Ψάχνουμε για λύση στη μορφή $v(\rho,\theta) = A(\rho)\,B(\theta)$, οπότε προκύπτει:

$$\rho^2 \frac{A''(\rho)}{A(\rho)} + \rho \frac{A'(\rho)}{A(\rho)} + \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = 0$$

και επομένως $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = -\lambda \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

$$\rho^2 \frac{A''(\rho)}{A(\rho)} + \rho \frac{A'(\rho)}{A(\rho)} - \lambda = 0, \qquad \rho > 1.$$

Οπότε δομή τη συνάρτηση λύση $u(\rho,0) = u(\rho,2\pi) \Leftrightarrow B(0) = B(2\pi)$

και τη παράγωγο $u_x(\rho,0) = u_x(\rho,2\pi) \Leftrightarrow B'(0) = B'(2\pi)$.

και έτσι έχουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών (με περιοδικές συνοριακές συνθήκες)

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$B(0) = B(2\pi)$$

$$B'(0) = B'(2\pi)$$

το οποίο έχουμε λύσει. Ειδικότερα οι ιδιοτιμές του είναι

$\lambda_0 = 0$ με ιδιοσυνάρτηση $B_0(\theta) = 1$ και

$\lambda_k = k^2$ " " $\sin k\theta$, $\cos k\theta$ (διπλή ιδιοτιμή),

Στη συνέχεια λύνουμε:

$$\rho^2 A_k''(\rho) + \rho A_k'(\rho) - \lambda_k A_k(\rho) = 0, \qquad \rho > 1.$$

α) Αν $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \rho A''(\rho) + A'(\rho) = 0 \Leftrightarrow (\rho A'(\rho))' = 0 \Rightarrow$

$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $A(\rho) = c_1 \ln\rho + c_2$, όμως $\ln\rho$ αφραστη

οπότε επιλέγουμε $c_1 = 0$ & $A_0(\rho) = 1$.

β) ~~Η εξίσωση~~ Βρίσκουμε λύση στη μορφή $A(\rho) = \rho^\tau$, οπότε προκύπτει

$$\tau(\tau-1)\rho^\tau + \tau\rho^\tau - k^2\rho^\tau = 0 \Leftrightarrow \tau^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow \tau = \pm k$$

Η ανάλυση ρ^k, $\rho > 1$ είναι αφραστη και απορριπτέα.

Όπου $B_k(\rho) = \rho^{-k}$, $\rho \geq 1$, και επομένως η γενική λύση

$$v(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}\left(a_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta\right).$$

Θέλω πρόσθετη συνθήκη

$$v(1,\theta) = 1 + 3\sin\theta \quad , \text{ δηλ}$$

$$1 + 3\sin\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta\right)$$

οπότε επιλέγουμε $\frac{a_0}{2} = 1$ & $\beta_1 = 3$ & $a_k = 0,\ k \geq 1$

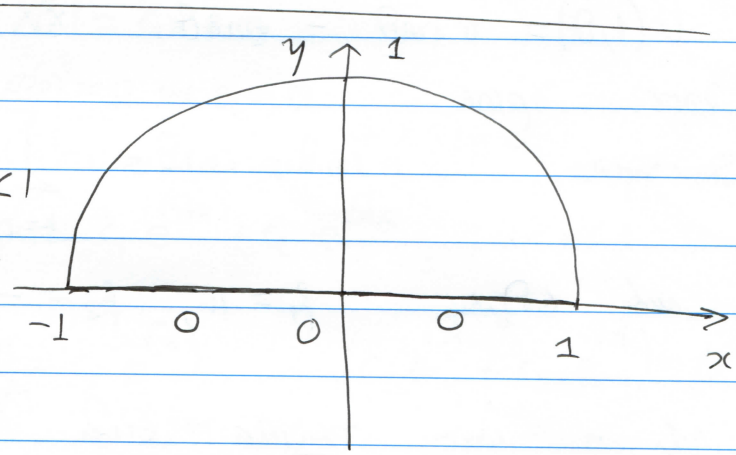
$\beta_k = 0,\ k \geq 2.$

και η λύση είναι

$$v(\rho,\theta) = 1 + \frac{3\sin\theta}{\rho}, \qquad \rho \geq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

---

3) (Όπως προηγούμενως)



$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \pi$$

$$v(\rho,\theta) = A(\rho)\, B(\theta)$$

$$\Rightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}: \quad \frac{\rho^2 A''(\rho)}{A(\rho)} + \rho\frac{A'(\rho)}{A(\rho)} + \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = 0$$

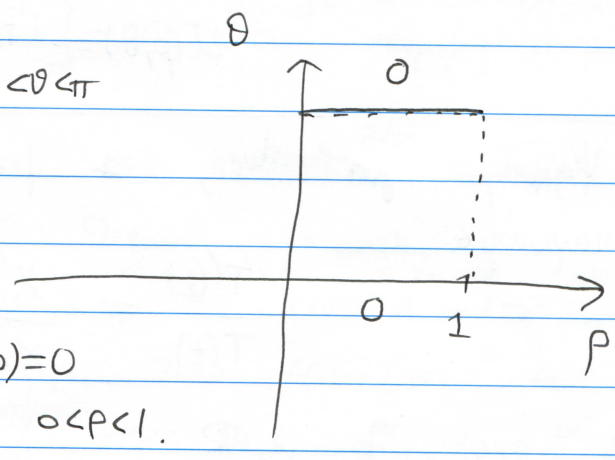
$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$B(0) = B(\pi) = 0$$

&

$$\rho^2 A''(\rho) + \rho A'(\rho) - \lambda A(\rho) = 0$$

$$0 < \rho < 1.$$



Το πρόβλημα ισοδυναμεί

5)

$$B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0$$

$$B(0) = B(\pi) = 0$$

Εχει λύση $\Rightarrow \lambda_k = k^2$, $B_k(\theta) = \sin k\theta$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\rho^2 A_k''(\rho) + \rho A_k'(\rho) - k^2 A_k(\rho) = 0$$

Λύση (όπως στη Ασκ. 2) ρ^k, ρ^{-k}

αυτή τη φορά η ρ^{-k}, $0<\rho<1$ είναι αφραστη και απορρίπτεται.

Έτσι η γενική λύση είναι

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \rho^k \sin k\theta, \quad 0 \le \rho < 1, 0 \le \theta < \pi.$$

$U(1,\theta) = \pi \sin\theta - \sin 2\theta$

Οπότε πρέπει

$$\pi \sin\theta - \sin 2\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin k\theta$$

και άρα $\beta_1 = \pi$, $\beta_2 = -1$ & $\beta_k = 0$, $k \ge 2$

και η λύση τελικά η

$$u(\rho,\theta) = \pi \rho \sin\theta - \rho^2 \sin 2\theta, \quad 0 \le \rho < 1, 0 \le \theta < \pi.$$

---

4) Ψάχνουμε για λύση στη μορφή $u(x,t) = X(x)T(t)$ οπότε παίρνουμε

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

και άρα $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad 0 \le x < \pi, \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad t \ge 0.$$

Άρα $u(0,t)=0 \Leftrightarrow X(0)T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0$

$u_x(1,t)+u_t(1,t)=0 \Leftrightarrow X'(1)T(t)+X(1)T'(t)=0 \Leftrightarrow$

$$X'(1)+X(1)\frac{T'(t)}{T(t)}=0$$

Άρα $\dfrac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda$ $\Rightarrow$

$$X'(1)-\lambda X(1)=0$$

Οπότε το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι το:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad 0<x<1$$

$$X(0)=0$$

$$X'(1)-\lambda X(1)=0.$$

Διακρίνουμε 2ις περιπτώσεις:

i) $\lambda=0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \quad X(x)=c_1x+c_2.$

$X(0)=0 \Leftrightarrow c_2=0$

$X'(1)=0 \Leftrightarrow c_1=0 \quad \Rightarrow X(x)\equiv 0$ απορριπτέα.

ii) $\lambda<0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \quad X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad 0<x<1.$

$X(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-c_1$

$X'(1)-\lambda X(1)=0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}\left(c_1e^{\sqrt{-\lambda}}-c_2e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)-\lambda\left(c_1e^{\sqrt{-\lambda}}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0$

$\overset{c_2=-c_1}{\Leftrightarrow} \sqrt{-\lambda}\,c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)-\lambda c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}}-e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0 \Leftrightarrow$

$c_1\sqrt{-\lambda}\left[e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}+\sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}}-e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)\right]=0 \Leftrightarrow$ για να πρόκειται για πρόβλημα ιδ.τ.

$$\left(1+\sqrt{-\lambda}\right)e^{\sqrt{-\lambda}}+\left(1-\sqrt{-\lambda}\right)e^{-\sqrt{-\lambda}}=0 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{-\lambda}\right)e^{2\sqrt{-\lambda}}=\sqrt{-\lambda}-1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Αν θεωρήσουμε $\sqrt{-\lambda}=x$ είναι δεκτή ρίζα η

$$(1+x)e^{2x}=x-1 \Leftrightarrow (1+x)e^{2x}+1-x=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=(1+x)e^{2x}+1-x, \quad x\geq 0$

η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f'(x)=e^{2x}+2(1+x)e^{2x}-1>0, \; x\geq 0$

οπότε $f \uparrow$ στο $[0,\infty)$. Άρα ότι $f(x)>\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(0)}, \quad x>0$,

7) Δηλ. η f δεν έχει θετικής ρίζες και επομένως δεν υπάρχουν αριθμητικές ιδιοτιμές.

iii) $\lambda>0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \quad X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad 0 \le x \le 1.$

Όμως: $X(0) \Leftrightarrow c_1 = 0$

$$X'(1) - \lambda X(1) = 0 \Leftrightarrow c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) - \lambda c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}\, c_2 \left(\cos(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})\right) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

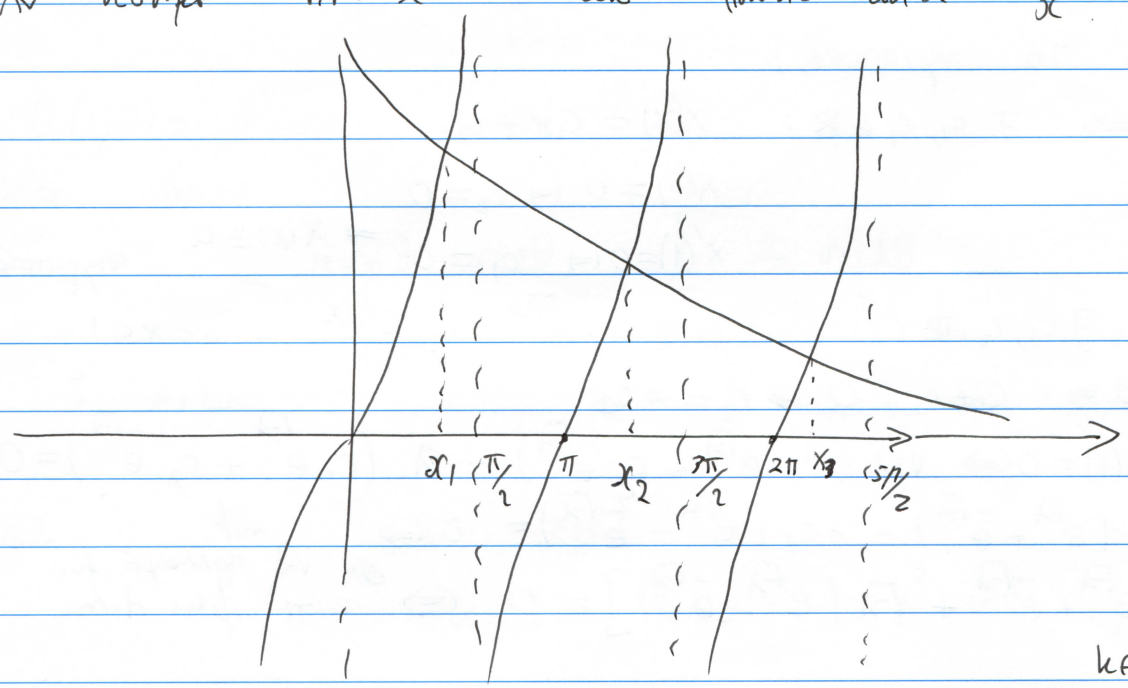
(εκτός θέλουμε μη τετριμμένη λύση)

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\tan\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

(μπορούμε να διαιρέσουμε με $\cos(\sqrt{\lambda})$ γιατί αν $\cos(\sqrt{\lambda})=0$ τότε η εξίσωση θα είχε επίσης $\sin\sqrt{\lambda}=0$ που είναι αδύνατο $(\sin^2\sqrt{\lambda}+\cos^2\sqrt{\lambda}=1)$

Αν θέσουμε $\sqrt{\lambda} = x$ τότε εξίσωση: $\tan x = \frac{1}{x}$.



$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Σε κάθε διάστημα της μορφής $\left((k-1)\frac{\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ έχουμε ακριβώς μία ρίζα αφού η $\tan x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x\tan x - 1 = 0$

και η $g: \left((k-1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x\tan x - 1$

$g'(x) = \tan x + x(1+\tan^2 x) > 0$ (αν $x>0$ εντάξει)

Επιπλέον εφόσον $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, η ρίζα x_{k+1} στο διάστημα

$\left((k-1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ τείνει στην ρίζα τής $\tan x = 0$ στο διάστημα αυτό πού είναι το $k\pi$

Οπότε
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}}{k\pi} = 1 \iff \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda_{k+1}}}{k\pi} = 1.$$

(Απ' όπου μπορεί κανείς ότι $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda_{k+1}}}{(k+1)\pi} = 1$ επίσης).

Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι τότε $X_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)$

και η γενική λύση δίνεται από

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)$$

όπου τα c_k είναι υπό προσδιορισμό.