Πέμπτη 5 Απριλίου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 7

1).Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx}(x,y) \;+\; u_{yy}(x,y) \;=\; 0, \;\; x^2+y^2>1,$$

$$u \;=\; 1+3\sin^3\theta, \;\; 0\le\theta<2\pi,$$

u φραγμένη.

2). Δίνεται το πρόβλημα

$$u_{xx}(x,y) \;+\; u_{yy}(x,y) \;=\; 0, \;\; x\in(0,\pi), \;\; y>0,$$

$$u(x,0) \;=\; 0, \quad x\in[0,\pi],$$

$$u_x(0,y) \;=\; u(\pi,y) \;=\; 0, \;\; y\ge 0.$$

Βρείτε μία θετική λύση του προβλήματος.

3). Με την μέθοδο του *Fourier* να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_x(x,t) \;-\; xu_t(x,t) \;=\; 0, \;\; x\in\mathbb{R}, \; t>0.$$

Ποιά είναι η λύση αν επιπρόσθετα ισχύει

$$u(x,0) \;=\; f(x), \;\; x\in\mathbb{R}?$$

4). Με την μέθοδο του *Fourier* να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) \;-\; u_{xx}(x,t) \;=\; 0, \;\; 0<x<\pi, \; t>0,$$

$$u_x(0,t) \;=\; u_x(\pi,t) \;=\; \frac{u(\pi,t)-u(0,t)}{\pi}, \;\; t>0.$$

Προς τούτο αποδείξτε ότι οι θετικές ιδιοτιμές λ κάποιου κατάλληλου προβλήματος ιδιοτιμών ικανοποιούν την εξίσωση

$$2(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)) \;-\; \sqrt{\lambda}\pi\,\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \;=\; 0.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι οι θετικές ιδιοτιμές είναι αριθμήσιμες και τις οποίες αριθμούμε ώστε

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots.$$

Βρείτε τις λ_{2k-1}, $k=1,2,\cdots$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι οι αρνητικές ιδιοτιμές λ σχετίζονται με την εξίσωση (το $\sqrt{-\lambda}\pi$ είναι θετική ρίζα)

$$2 \;+\; x \;+(x-2)e^x \;=\; 0.$$

Τελικά εκφράστε τη γενική λύση του προβλήματος. Οι ιδιοσυναρτήσεις και η γενική λύση να εκφραστούν σαν συνάρτηση των ιδιοτιμών λ_k.

1) Γράφοντας την Δ.Ε. σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε τη μορφή

$$u(x,y) = v(r,\theta)$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \quad , 1 < r, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, \quad r > 1, \ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$v(1,\theta) = 1 + 3\sin^3\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Οπότε βρίσκουμε αρχικά λύση της μορφής $v(r,\theta) = R(r)A(\theta)$ και παίρνουμε

$$R''(r)A(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)A(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)A''(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \frac{A''(\theta)}{A(\theta)} = 0, \quad r > 1, \ 0 \le \theta < 2\pi.$$

και επομένως $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{A''(\theta)}{A(\theta)} = -\lambda, \quad \theta \in (0, 2\pi]$$

(και λόγω συνέχειας της v στο $\theta = 0$ & 2π, δίνει περιοδικές συνοριακές συνθήκες)

$$A(0) = A(2\pi)$$
$$A'(0) = A'(2\pi).$$

&

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} - \lambda = 0, \quad r > 1.$$

Το πρώτο υπόπροβλημα ιδιοτιμών

$$A''(\theta) + \lambda A(\theta) = 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$
$$A(0) = A(2\pi)$$
$$A'(0) = A'(2\pi)$$

Έχει λύσεις ιδιοτιμές και έχουν πρότυπο τα ακόλουθα:

ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$, (απλή) ιδιοσυνάρτηση $A_0(\theta) = 1$

ιδιοτιμή $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, με $\cos k\theta$, $\sin k\theta$

Αν $\lambda_0 = 0 \Rightarrow r^2 R''(r) + r R'(r) = 0 \Leftrightarrow (r R'(r))' = 0$

$\Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}: \quad r R'(r) = c_1 \Rightarrow R' = \frac{c_1}{r} \Rightarrow$

$$R(r) = c_1 \ln \frac{1}{r} + c_2$$

και εάν η η λύση γράφεται, οπότε $\underline{R(r) = 1}$.

Αν $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0, \quad r > 1$$

ψάχνουμε για λύση στη μορφή $R(r) = r^a \Rightarrow$
$R'(r) = a r^{a-1}$, $R''(r) = a(a-1) r^{a-2}$

οπότε

$$a(a-1) r^a + a r^a - k^2 r^a = 0 \Rightarrow a = \pm k$$

$$\Rightarrow R(r) = c_1 r^k + c_2 r^{-k}, \quad r > 1.$$

Όμως η r^k δεν αφήνει σύκλιση

και επομένως $R(r) = r^{-k}$, $r \ge 1$.

$+ \sum_{k=1}^{\infty} r^k$ [illegible]

(ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ τα δυο για $r=1$)

$\partial\Omega$ ορίζω

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta\right) = 1 + 3\sin^3\theta \qquad \theta \in [0,$$

Θα πρέπει το $\sin^3\theta$ και ο ν

Θα πρέπει ταυτ.

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \Rightarrow$$

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta \Rightarrow$$

$$1 + 3\sin^3\theta = 1 + \frac{9}{4}\sin\theta - \frac{3}{4}\sin 3\theta$$

Επομένως τελικά ορίζουμε τη:

$$a_0 = 1$$

$$a_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\beta_1 = \frac{9}{4}$$

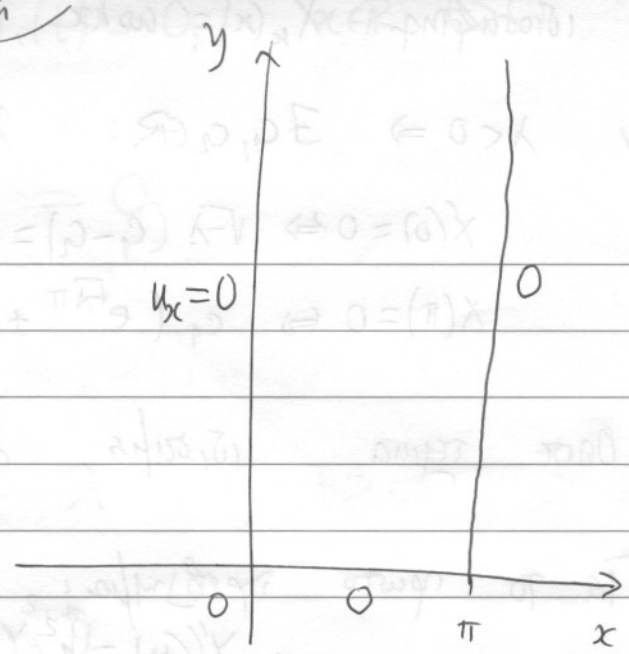
$$\beta_3 = -\frac{3}{4}$$

&

$$\beta_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}.$$

$$v(r,\theta) = 1$$

Αρχικά ψάχνουμε για λύσεις με τη μορφή



$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

οπότε παίρνουμε μέσω των

$u(x,0)=0 \Leftrightarrow Y(0)=0$

$u(\pi,y)=0 \Leftrightarrow X(\pi)=0$

$u_x(0,y)=0 \Leftrightarrow X'(0)=0$

ότι

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

οπότε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,\ y>0 \\ Y(0)=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0,\ y>0 \\ Y(0)=0 \end{array}\right.$$

&

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{X''(x)}{X(x)} + \lambda = 0 \\ X'(0) = 0 = X(\pi) \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0<x<\pi \\ X'(0) = X(\pi) = 0 \end{array}\right.$$

Για το 2ο πρόβλημα, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$, $X'(0)=0 \Rightarrow c_1 = 0$ & $X(\pi)=0 \Rightarrow c_2 = 0$
$\Rightarrow X(x) \equiv 0$

β) $\lambda > 0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(0)=0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

$X(\pi)=0 \Leftrightarrow c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = \frac{(2k-1)\pi}{2},\ k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2,\ k\in\mathbb{N}$

5) με ιδιοσυνάρτηση $X_k(x) = \cos kx$, $0 < x < \pi$.

Αν $\lambda < 0 \Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2$

$X(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$. ΑΤΟΠΟ.

Οπότε τελικά ιδιοτιμές $\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2$, ιδιοσυνάρτηση $X_k(x) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}x\right)$

Για το χρονικό πρόβλημα:

$$Y''(y) - \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 Y(y) = 0, \quad y > 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}: Y(y) = c_1 e^{\frac{2k-1}{2}y} + c_2 e^{-\frac{2k-1}{2}y}, \quad y \geq 0.$$

$$Y(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1$$

οπότε $Y_k(y) = e^{\frac{2k-1}{2}y} - e^{-\frac{2k-1}{2}y}$.

Γενική λύση: $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(e^{\frac{2k-1}{2}y} - e^{-\frac{2k-1}{2}y}\right) \cos\left(\frac{2k-1}{2}x\right)$

Μια θετική λύση η: $\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}\right) \cos\frac{x}{2}$, $0 < x < \pi$, $y > 0$

αφού $e^y - 1 > 0$, $y > 0$ &

$\cos\frac{x}{2} > 0$, $x \in (0, \pi)$.

---

3) Ψάχνουμε για λύση στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

πρέπει η:

$$X'(x)T(t) - x X(x) T'(t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t>0$$

$$\Rightarrow \frac{X'(x)}{x X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = 0$$

$\Longrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad , \quad t>0$$

&

$$\frac{X'(x)}{x X(x)} - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1) \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0 \quad , \quad t>0$$

$$(2). \quad X'(x) - \lambda x X(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(1) \Rightarrow \quad e^{-\lambda t} T'(t) - \lambda e^{-\lambda t} T(t) = 0, \qquad t>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t} T(t)\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\exists\ c \in \mathbb{R}: \qquad T(t) = c\, e^{\lambda t} \quad , \quad \underline{t \geq 0}$$

$$(2): \quad X'(x) - \lambda x X(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} X'(x) - \lambda x e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} X(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} X(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} X(x) = c \Leftrightarrow X(x) = c\, e^{\frac{\lambda}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7) Η ~~[illegible]~~ GSL δυνατοτήτων μπορούμε να φτιάξουμε έχει τη μορφή $u(x,t) = c(\lambda) e^{\lambda t} e^{\frac{1}{2}x^2}$

και η γενική

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{\lambda t} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} d\lambda$$

Όμως $u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και άρα πρέπει:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{\frac{1}{2}x^2} d\lambda .$$

οπότε (θυμηθείτε ότι για τη συνάρτηση δοσμένη πρέπει $f(x) = f(-x)$)

και τότε έχουμε ότι $x > 0$

$$f(\sqrt{2x}) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{\lambda x} d\lambda .$$

Άρα ετσι, καταλήγω

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{\lambda (t + \frac{x^2}{2})} d\lambda$$

$$= f\left(\sqrt{2\left(t + \frac{x^2}{2}\right)}\right)$$

$$= f\left(\sqrt{2t + x^2}\right) , \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$$

4) Ψάχνουμε για μη τετριμμένες λύσεις του προβλήματος

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Για να ικανοποιούν οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t)$$
$$u_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t)$$
$$\frac{u(\pi,t)-u(0,t)}{\pi} = \frac{X(\pi)-X(0)}{\pi}T(t)$$

Άρα μια και η λύση μη τετριμμένη, η X να ικανοποιεί.

$$X'(0) = X'(\pi) = \frac{X(\pi)-X(0)}{\pi}.$$

και επιπλέον θέλουμε

$$T'(t)X(x) - X''(x)T(t) = 0, \quad 0<x<\pi, \ t>0$$
$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

και δηλαδή $T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = ce^{-\lambda t}, \ t \geq 0$.

&

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0<x<\pi$$
$$X'(0) = X'(\pi) = \frac{X(\pi)-X(0)}{\pi}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις. α) $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = c_1x + c_2$

$\Rightarrow X'(0) = X'(\pi) = c_1, \quad \frac{X(\pi)-X(0)}{\pi} = \frac{c_1\pi + c_2 - c_2}{\pi} = c_1.$

Οπότε στην ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$, ιδιοσυνάρτηση $1, x$.

β) $\lambda > 0 \Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x), \ 0 \leq x \leq \pi$.

$\Rightarrow X'(x) = \sqrt{\lambda}(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}x))$. Άρα η δηλαδή

$X'(0) = c_2\sqrt{\lambda}, \quad X'(\pi) = \sqrt{\lambda}(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi))$.

$X'(0) = X'(\pi) \Leftrightarrow c_2 = -c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi) \Leftrightarrow c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)) = 0$

9) $$\frac{X(\pi)-X(0)}{\pi} = \frac{c_1\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi)-c_1}{\pi} = \frac{-c_1\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi)}{\pi}$$

και ενδιαφέρον πρέπει: $$c_2\sqrt{\lambda} = \frac{-c_1\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi)}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$c_1\left(-1+\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)+c_2\left(\sin(\sqrt{\lambda}\pi)-\pi\sqrt{\lambda}\right)=0 \qquad (1)$$

Ειδικά
$$c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi)+c_2\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)=0 \qquad (2)$$

Εάν $1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$ τότε η (1) δίνει

$c_2=0$, οπότε οι τιμές $\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=1$ αντιπροσωπεύουν

κάποιες ιδιοτιμές του προβλήματος. $\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = 2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}=2k \Leftrightarrow \lambda=(2k)^2$, $k\in\mathbb{N}$, με ιδιοσυνάρτηση, $\cos(2kx)$.

Εάν $1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} c_1 = +c_2\dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}\pi)-\pi\sqrt{\lambda}}{1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}$

και η (2) γράφεται: $+c_2\dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}\pi)\left(\sin(\sqrt{\lambda}\pi)-\pi\sqrt{\lambda}\right)}{1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}+c_2\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)=0$

δηλ. για πρακτικές μη τετριμμένη λύση πρέπει $c_2\neq 0$ &

$$1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+\frac{\sin(\sqrt{\lambda}\pi)\left(\sin(\sqrt{\lambda}\pi)-\pi\sqrt{\lambda}\right)}{1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)^2+\sin^2(\sqrt{\lambda}\pi)-\pi\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Leftrightarrow$$

$$1-2\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+\underbrace{\cos^2(\sqrt{\lambda}\pi)+\sin^2(\sqrt{\lambda}\pi)}_{1}-\sqrt{\lambda}\pi\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Leftrightarrow$$

$$(*)\quad 2\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\right)-\sqrt{\lambda}\pi\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0.$$

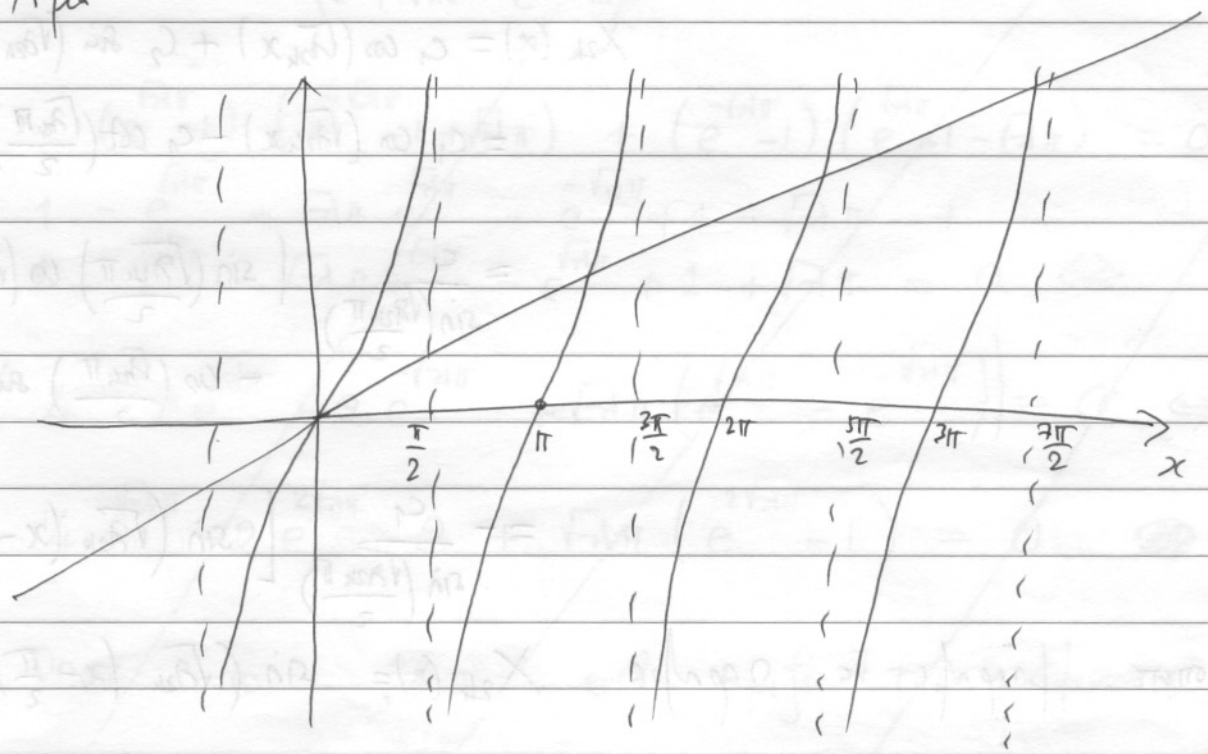
Σημειώνεται ότι και η προηγούμενη ισότητα (που ισχύουν $0=1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)$)

είναι λύση του εξισώσεων $(*)$, οπότε αυτές δίνουν τις θετικές ιδιοτιμές. Εάν θέλαμε να βρούμε τις επιπρόσθετες ιδιοτιμές (για τις οποίες $1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\neq 0$), η $(*)$ γράφεται ισοδύναμα σαν:

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda}\pi}=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}\pi)}{1-\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}=\frac{2\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right)}=\cot\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right).$$

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}$$

Η εξίσωση $x = \tan x$, $x > 0$ έχει λύση μόνο στο 2ο και 3ο τεταρτημόριο, όπως στο σχήμα

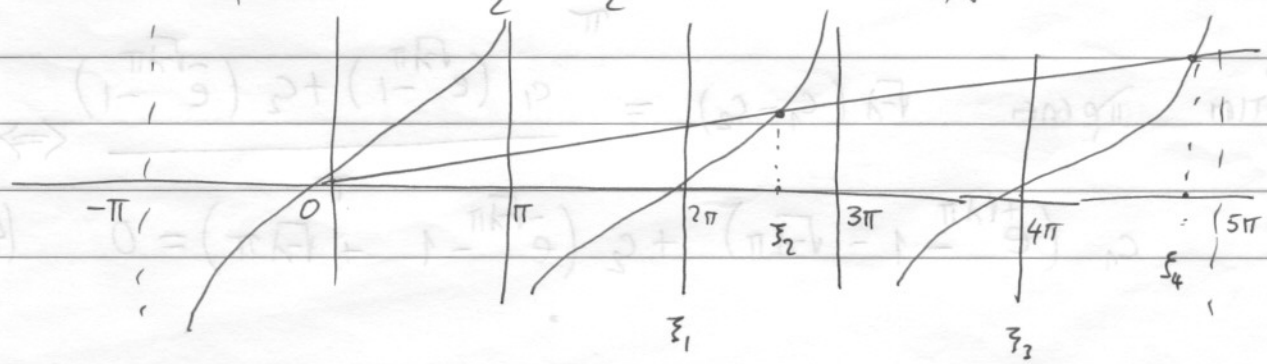


Η εξίσωση η ισοδύναμη $f : \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{2k+1}{2}\pi\right) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \tan x - x$, παίρνοντας

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$$
$$x \neq k\pi$$

Προκύπτει ότι έχουμε ακριβώς μία ρίζα x_k, η οποία μάλιστα βρίσκεται στο διάστημα $\left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, καθώς δε $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\frac{(2k+1)\pi}{2}} = 1$.

Οπότε η εξίσωση $\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ έχει αντίστοιχα



11) Προκύπτει λοιπόν ότι $\lambda_{2k-1} = (2k)^2, \; k \in \mathbb{N}$

ενώ $(2k)^2 < \lambda_{2k} < (2k+1)^2, \; k \in \mathbb{N}$

με ιδιοσυναρτήσεις $X_{2k-1}(x) = \cos(2kx), \; k \in \mathbb{N}$

$$X_{2k}(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda_{2k}}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda_{2k}}\, x)$$

$$= c_1 \cos(\sqrt{\lambda_{2k}}\, x) - c_1 \cot\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2k}}\,\pi}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda_{2k}}\, x)$$

$$= \frac{c_1}{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2k}}\,\pi}{2}\right)} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2k}}\,\pi}{2}\right) \cos(\sqrt{\lambda_{2k}}\, x) - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2k}}\,\pi}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda_{2k}}\, x) \right]$$

$$= -\frac{c_1}{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{2k}}\,\pi}{2}\right)} \left[\sin\left(\sqrt{\lambda_{2k}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \right]$$

οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε $X_{2k}(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_{2k}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(γ) Αρνητικές ιδιοτιμές $\lambda < 0 \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \; 0 \le x \le \pi \Longrightarrow$$

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right).$$

Οπότε $X'(0) = X'(\pi) \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right)$

$\Leftrightarrow c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - 1\right) - c_2\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - 1\right) = 0 \qquad (3) \Leftrightarrow c_2 = -c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}$

Επίσης $\dfrac{X(\pi) - X(0)}{\pi} = \dfrac{c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - c_1 - c_2}{\pi} =$

$$= \frac{c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - 1\right) + c_2\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - 1\right)}{\pi}.$$

Έτσι πρέπει $\sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) = \dfrac{c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - 1\right) + c_2\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - 1\right)}{\pi} \Leftrightarrow$

$$c_1\left(e^{+\sqrt{-\lambda}\pi} - 1 - \sqrt{-\lambda}\pi\right) + c_2\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - 1 + \sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0 \qquad (4)$$

12) Το συστημα (3), (4) για να εχει λυση πρεπει

$$\det\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-1-\sqrt{-\lambda}\pi & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}-1+\sqrt{-\lambda}\pi \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \cancel{e^{\sqrt{-\lambda}\pi}} + \sqrt{-\lambda}\pi\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \cancel{e^{+\sqrt{-\lambda}\pi}} + 1 + \sqrt{-\lambda}\pi = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{-\lambda}\pi - 2)\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + \sqrt{-\lambda}\pi + 2 = 0$$

οπότε πρεπει το $\sqrt{-\lambda}\pi$ να είναι λυση της εξισωσης

$$(x-2)\, e^{x} + x + 2 = 0.$$

Θα δειξουμε οτι η εξισωση αυτη δεν εχει θετικες ριζες. Προς τουτο θεωρουμε τη συναρτηση

$g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με τυπο $g(x) = (x-2)e^{x} + x + 2$,

τοτε $g'(x) = e^{x} + (x-2)e^{x} + 1 = (x-1)e^{x} + 1$,

$g''(x) = e^{x} + (x-1)e^{x} = xe^{x} > 0$, $x > 0$.

Επομενως $g' \uparrow$ και αρα $g'(x) > g'(0)$, $\forall x > 0$.

Ομως $g'(0) = 0$. Αρα $g'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Επομενως $g \uparrow$ στο $(0,\infty)$ $\Rightarrow$ $g(x) > \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(0)}$, $x > 0$.

Και τελικα δεν υπαρχει θετικη ριζα.

Η γενικη λυση επομενως εχει τη μορφη

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{-\lambda_k t}\, X_k(x), \quad 0 < x < \pi,\ t > 0.$$