Πέμπτη 17 Μαϊου 2012

Α. Τερτίκας

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 9

1). Έστω Ω φραγμένο χωρίο. Με χρήση της Αρχής του Μεγίστου αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

2). Έστω Ω φραγμένο χωρίο. Με χρήση της Αρχής του Μεγίστου αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$
$$u(x,t) = h(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega.$$

3). Έστω η λύση του προβλήματος

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 4x(1-x), \quad x \in (0,1).$$

Με χρήση της Αρχής του Μεγίστου αποδείξτε

$$0 \leq u(x,t) \leq 1, \quad x \in (0,1), \quad t > 0.$$

4). Έστω $f : \{(x,y), x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συνάρτηση για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$f(x,y) \leq f(1,0), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$f_x(1,0) \geq 0, \quad f_y(1,0) = 0.$$

Η παράδοση των λύσεων μπορεί να γίνει είτε την Πέμπτη 24 Μαϊου 2012 στο μάθημα είτε να αποσταλούν ηλεκτρονικά μέχρι 9:00 της Πέμπτης 24 Μαϊου 2012 στη διεύθυνση tertikas@math.uoc.gr

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

1) 1) Έστω u_1, u_2 δύο διαφορετικές λύσεις, τότε η

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x), \quad x \in \Omega$$

ικανοποιεί:

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega$$
$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Όμως επειδή Ω φραγμένο και $\Delta u(x) \geq 0$ η αρχή του μεγίστου (δυσδιάστατη ελλειπτική περίπτ.) δίνει

$$\max_{\bar{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x)$$

Όμως $\max_{\partial\Omega} u(x) = 0$, οπότε $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = 0$

$\Rightarrow \quad u(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1)$

Πάλι όμοια επειδή $\Delta u(x) \leq 0$, $x \in \Omega$ η αρχή ελάχιστου δίνει:

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x) = 0$$

Οπότε $u(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (2)$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $u(x) \equiv 0$ στο $\bar{\Omega}$ ΑΤΟΠΟ.

---

2) Έστω u_1, u_2 δυο διαφορετικές λύσεις για $T > 0$ τοπικά στις φράξεις. Η $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ λύνει το πρόβλημα

$$u_t - \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \ t > 0$$
$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0$$
$$u(x,0) = 0 \quad x \in \Omega.$$

Επίσης ισχύει $u_t - \Delta u \leq 0$ σε $\Omega \times (0,T]$

η αρχή μεγίστου δίνει

$$\max_{x\in\bar{\Omega},\ t\in[0,T]} u(x,t) = \max_{\text{Παραβολικό Σύνορο του } \bar{\Omega}\times[0,T]} u(x,t)$$

Παραβολικό Σύνορο του $\bar{\Omega}\times[0,T] = (\Omega\times\{0\}) \cup (\partial\Omega\times[0,T])$

Όμως η u είναι 0 στο παραβολικό σύνορο, οπότε

$$\max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u(x,t) = 0 \Rightarrow u(x,t) \leq 0 \quad \bar{\Omega}\times[0,T]$$

Παίρνοντας από την αρχή ελαχίστου (μια και

ισχύει $u_t - \Delta u \geq 0$ σε $x\in\Omega$ & $t\leq T$)

δίνει

$$\min_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u(x,t) = \min_{\text{Παραβολικό Σύνορο του } \bar{\Omega}\times[0,T]} u(x,t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) \geq 0 \quad \text{σε } \bar{\Omega}\times[0,T]$$

και τελικά $u(x,t) \equiv 0 \quad \forall x\in\bar{\Omega},\ t\in[0,T]$

και επειδή το $T>0$ είναι τυχαίο, προκύπτει ότι

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \bar{\Omega},\ t\geq 0$$

ΑΤΟΠΟ.

3) Θεωρούμε τη συνάρτηση $v(x,t) = u(x,t)$ και T τυχαίο θετικό φραγμένο. Τότε επειδή η v ικανοποιεί

$$v_t - v_{xx} \geq 0$$

Η αρχή ελαχίστου στο $[0,1]\times[0,T]$ δίνει

$$\min_{[0,1]\times[0,T]} v(x,t) = \min_{\text{Πρόβολή Συνόρου στο } [0,1]\times[0,T]} v(x,t) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad v(x,t) \geq 0 \Leftrightarrow \quad [0,1]\times[0,T].$$

$$u(x,t) \geq 0 \quad \text{—"—}$$

Πρόβαλε η συνάρτηση $w(x,t) = 1 - u(x,t)$ ικανοποιεί:

$$w_t - w_{xx} = 0, \qquad x\in(0,1),\ T\geq t>0$$

και

$$w(0,t) = w(1,t) = 1, \qquad 0<t\leq T$$

$$w(x,0) = 1-4x+4x^2 \qquad 0<x<1$$

$$= (1-2x)^2 \geq 0 \qquad 0\leq x\leq 1.$$

Η αρχή του ελαχίστου δίνει ότι

$$\min_{[0,1]\times[0,T]} w(x,t) = \min_{\text{Πρόβολή Συνόρου } [0,1]\times[0,T]} w(x,t) \geq 0$$

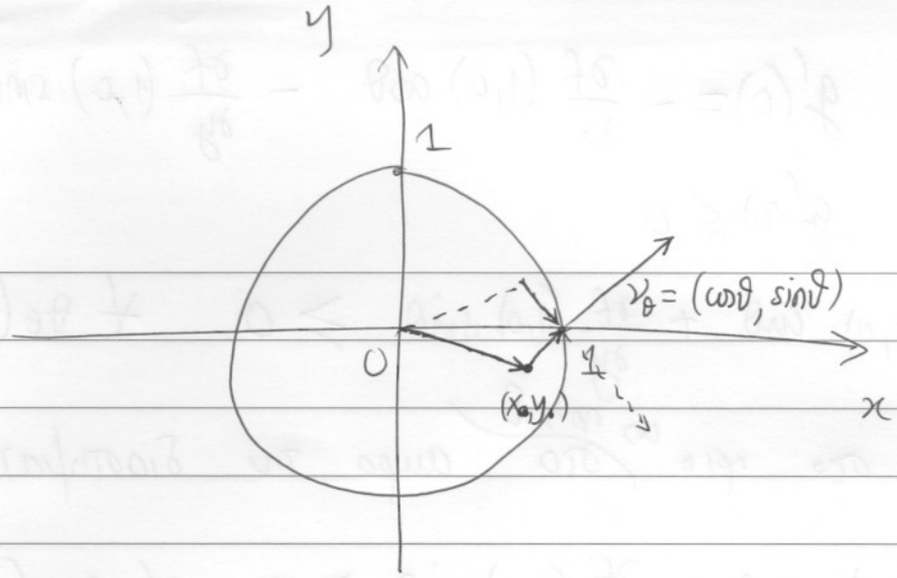
Οπότε $\min_{[0,1]\times[0,T]} w \geq 0 \Longrightarrow w(x,t) \geq 0 \Longrightarrow$

$$1 \geq u(x,t) \qquad [0,1]\times[0,T]$$

και τελικά επειδή το T είναι τυχαίο.

$$0 \leq u(x,t) \leq 1, \qquad x\in[0,1], \quad t\geq 0.$$

4)



Έστω $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, τότε για $0 < t$ αρκετά μικρό ώστε επαδη $(x,y) \neq t(\cos\theta, \sin\theta) = (1,0) \Leftrightarrow$

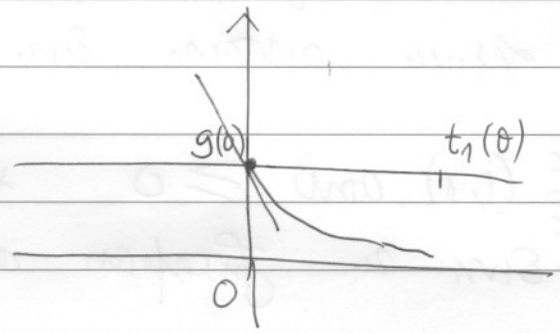
$$(x,y) = (1 - t\cos\theta, -t\sin\theta)$$

Τότε το (x,y) είναι εφικτό σημείο ~~στη~~ κυκλίνη, έχουμε

$$f(x,y) \leq f(1,0) \Leftrightarrow$$

$$f(1-t\cos\theta, -t\sin\theta) \leq f(1,0), \quad 0 < t < t_1(\theta)$$

(θέτω η $g(t) = f(1-t\cos\theta, -t\sin\theta)$ ικανοτητα $g(t) \leq g(0)$, $0 < t < t_1(\theta)$



Προφανώς επιθυμούμε μια και η g είναι παραγωγίσιμη, οπ $g'(0) \leq 0$

Όμως $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(1-t\cos\theta, -t\sin\theta) \cdot (-\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(1-t\cos\theta, -t\sin\theta) \cdot (-\sin\theta)$

5)

και άρα $g'(0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\sin\theta.$

$$g'(0) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\sin\theta \geq 0. \quad \forall\, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και πέρνωντας στο όριο ως προς θ στα άκρα του διαστήματος ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\sin\theta \geq 0 \quad \forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Αν υιοθετήσουμε $\theta = -\frac{\pi}{2}$, προκύπτει ότι

$$-\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \geq 0$$

ενώ για $\theta = \frac{\pi}{2}$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \geq 0$$

και άρα τελικά $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$

Τότε όμως η αρχική ανισότητα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cos\theta \geq 0 \quad \forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

που για $\theta = 0$ είναι η ζητούμενη ανισότητα.