Τρίτη 22 Νοεμβρίου 2011

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Πρόοδος

Θέμα 1. (α) (1 μον.) Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες

$$\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n, \quad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad n\in\mathbb{N},$$

είναι συγκλίνουσες και βρείτε τα όρια αυτών

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

(β) (1,5 μον.) Δίνεται η αναδρομική ακολουθία

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=\sin a_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η a_n είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριο αυτής.

Θέμα 2. (α) (1,5 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

όπου η παράμετρος $\alpha\geq 0$.
(i) Βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\alpha\geq 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0^+.
(ii) Βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\alpha\geq 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0^+.
(β) (1 μον.) Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$1+x+x^2=\frac{2011}{2+\sin^2 x},$$

έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

Θέμα 3. (α) (1,5 μον.) Για $p>0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{x^p+1}{(x+1)^p}, \quad x\geq 0.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή την οποία και να προσδιορίστε.
(β) (1 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και βρείτε την παράγωγο αυτής. Είναι η f δυο φορές παραγωγίσιμη στο μηδέν;

Θέμα 4. (α) (1,5 μον.) Μία ράβδος σταθερού μήκους $2m$ έχει το ένα άκρο Α στον ημιάξονα Ox και το άλλο άκρο Β στον ημιάξονα Oy ($\widehat{xOy} = 90^o$). Βρείτε τη θέση της ράβδου έτσι ώστε το εμβαδό του τριγώνου OAB να είναι το μέγιστο δυνατό. Ποιό είναι το εμβαδό τότε ;
(β) (1 μον.) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία

$$f(0) = 1, \ \ |f'(x)| \leq 1, \ \ x \in [0, 1].$$

Να αποδείξτε ότι ισχύει

$$1 - x \leq f(x) \leq 1 + x, \ \ x \in [0, 1].$$

Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία του αποτελέσματος;

Θέμα 5. (2,5 μον.) Μία ράβδος σταθερού μήκους $\sqrt{3}$ m έχει το ένα άκρο Α να κινείται στον ημιάξονα Ox και το άλλο άκρο Β να κινείται στον θετικό ημιάξονα Oy ($\widehat{xOy} = 90^o$). . Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το άκρο Β είναι στην αρχή των αξόνων και κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα

$$u(t) = \sqrt{3} \cos t \ \frac{m}{sec}, \ \ t \in [0, \pi].$$

Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του άκρου Α τη χρονική στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από το σημείο που απέχει απόσταση $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m από την αρχή των αξόνων.

Να λυθούν ακριβώς 4 θέματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Α. Τερτίκας, Α. Φειδάς