



Τετάρτη 29 Νοεμβρίου 2023

Διδάσκων: Αχιλλέας Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

Πρόοδος

Θέμα 1. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Θέμα 2. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= -y^2(t) + t^2 + 1, \quad t > 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

- α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.
β) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων στο διάστημα ύπαρξης των λύσεων.
γ) Εξετάστε τη μονοτονία της λύσης στο διάστημα ύπαρξης της. Ειδικότερα αποδείξτε πως στο διάστημα ύπαρξης της λύσης ισχύει

$$y(t) < (t^2 + 1)^{1/2}, \quad \forall t \geq 0.$$

- δ) Αποδείξτε ότι οι λύσεις ορίζονται σε όλο το $[0, +\infty)$.

Θέμα 3. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= -y^{1/3}(t) + t^2 + 1, \quad t > 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

- α) Εξετάστε τη μονοτονία της λύσης στο διάστημα ύπαρξης της.
β) Αποδείξτε ότι οι λύσεις ορίζονται σε όλο το $[0, +\infty)$.
γ) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.

Θέμα 4. Αποδείξτε ότι η λύση του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) (1 + x^2(t) + y^2(t)), \quad t > 0, \\y'(t) &= y(t) (1 + x^2(t) + y^2(t)), \quad t > 0 \\x(0) &= c_1, \quad y(0) = c_2\end{aligned}$$

δεν ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$ εαν $c_1^2 + c_2^2 > 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!