ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: 13/02/2024

(1) Συνήθεις Δ.Ε

(2) Μερικές Δ.Ε

Διαφορική Εξίσωση = Άγνωστη συνάρτηση με την παράγωγό της.

Η ΠΙΟ ΑΠΛΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

$x'(t)=0 \Rightarrow x(t)=x(0)$ (ταχύτητα μηδέν)

Βρείτε τις συναρτήσεις x που να είναι ίσες με συναρτήσεις $g(t)$. $(x'(t)=g(t))$

$x(t_0)=x_0 \quad t>t_0.$

ΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ:

(1) Η συνάρτηση πρέπει να είναι παραγωγίσιμη $\forall\, t>t_0$

(2) $x \in D(t,+\infty)$ απαιτώ $x'(t)=g(t)$

(3) Η x συνεχής στο t_0. Δηλαδή $\lim_{t\to t_0^+} x(t)=x_0$

Άρα $x\in D(t_0,+\infty)\cap C[t_0,+\infty)$

$x'(t)=g(t)$, $t>t_0$

$\lim_{t\to t_0^+} x(t)=x_0$

Να λυθεί το πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

$$x'(t) = g(t) \quad t > t_0$$

$$x(t_0) = x_0$$

Προσοχή:

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

- Για να μπορώ να ολοκληρώσω πρέπει η g να είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_0, t]$
- Αν υποθέσουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_0, t]$ τότε

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x(t) - x(t_0)$$

- Ολοκληρώσιμη - Riemann ολοκληρώσιμη (φραγμένη)

$\Downarrow$

Παράγουσα συνάρτηση: $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$

Πόσο καλή είναι η συνάρτηση $G(t)$;

(1) Η G είναι συνεχής συνάρτηση (ομοιόμορφα συνεχής) είναι ιδιαίτερα Lipschit συνεχής δηλαδή: $|G(t) - G(s)| \leq M|t-s| \;\forall\; t, s \in [t_0, +\infty)$

(2) Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού:

Η G παραγωγίζεται στα σημεία συνέχειας της g δηλαδή η g

είναι συνεχής στο $\theta \in (t_0, +\infty)$ τότε και η G παραγωγίζεται στο θ και μάλιστα $G'(\theta) = g(\theta)$.

(3) Εάν η $g \in [t_0, +\infty) \Rightarrow G$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $G'(t) = g(t)$ $\forall$ $t \geq t_0$.

Το πρόβλημα ΑΤ όταν η $g \in [t_0, +\infty)$ έχει λύση την

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \quad t \geq t_0.$$

Η x είναι παραγωγίσιμη με $x'(t) = g(t)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ:

Εάν $f \in C([a,b])$ παραγωγίσιμη στο $(a,b) \Rightarrow \exists$ $\xi \in (a,b)$ τ.ω $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

$$G'(t) = g(t) = x'(t) \Leftrightarrow (x(t) - G(t))' = 0$$

$$\Rightarrow x(t) - G(t) = x(t_0) - G(t_0) \quad t > t_0$$

Πολλαπλασιαστής Euler:

Μετατρέπω τη $x'(t)+g(t)\cdot x'(t)=h(t)$ στη μορφή $y'(t)=a(t)$

Πολ/ζω τη συνάρτηση $x'(t)+g(t)\cdot x'(t)=h(t)$ με $\varphi\neq 0$ έτσι

ώστε $\varphi x' + \boxed{\varphi g}\, x$

$$(\varphi(t)\cdot x(t))' = h(t)\cdot\varphi(t) \Leftrightarrow \varphi(t)\cdot x'(t) + \boxed{\varphi'(t)}\cdot x(t) = h(t)\cdot\varphi(t)$$

Η επιλογή πρέπει να είναι τέτοια ώστε $\varphi'(t)=g(t)\cdot\varphi(t)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\varphi'(t)=2t\varphi(t)$$

π.χ. $\varphi(t)=e^{t^2}$

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=g(t)$$

$$(\ln\varphi(t))' = \left(\int_0^t g(s)\,ds\right) \Rightarrow \ln\varphi(t)=\int_0^t \varphi(s)\,ds \Rightarrow \varphi(t)=e^{\int_0^t g(s)\,ds}$$

Προβλημα:

Να λυθεί η Παρ. Α.Τ: $x'(t)+g(t)\cdot x'(t)=h(t) \quad t>t_0$

$$x(t_0)=x_0$$

όπου $g,h:[t_0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

Λύση:

Η συνάρτηση φ είναι ο πολλαπλασιαστής Euler που πρέπει να έχει την αρχική Δ.Ε

Δηλαδή $\quad e^{\int_0^t g(s)ds} x'(t)+e^{\int_0^t g(s)ds} g(t)\,x(t)=h(t)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t g(s)ds}\cdot x(t)\right)=h(t)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(\xi)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds}d\xi\right)$$

διότι η $Q(t)=e^{\int_0^t g(s)ds}=H(G(t))$, όπου $H(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα ο κανόνας της αλυσίδας είναι $Q'(t)=H'(G(t))\cdot G'(t)$

$$=e^{G(t)}\cdot g(t)$$

$$=g(t)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds}$$

$$\Rightarrow e^{\int_0^t g(s)ds}\cdot x(t)-\int_{t_0}^t h(\xi)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds}d\xi=0$$

$$\Rightarrow e^{\int_0^t g(s)ds}\cdot x(t)-\int_{t_0}^t h(\xi)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds}=x(t_0)=x_0$$

$$\Rightarrow x(t)=x_0 e^{-\int_0^t g(s)ds}+e^{-\int_0^t g(s)ds}\cdot\int_{t_0}^t h(\xi)\cdot e^{\int_0^t g(s)ds}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ Δ.Ε 1ης ΤΑΞΗΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ:

15/02/2024

$$x'(t) + g(t)\cdot x(t) = h(t)$$

Για την επίλυση χρησιμοποιώ: Πολ/τη Euler έτσι ώστε

$$\underbrace{\varphi\cdot x'(t) + g(t)\cdot x(t)}_{(\varphi(t)\cdot x(t))'} = \varphi\cdot h(t)$$

$$= \varphi h$$

$$\Rightarrow \varphi(t)\cdot x'(t) + \varphi'(t)\cdot x(t) = \varphi\cdot h$$

<u>Μια λύση:</u> $\varphi'(t) = g(t)\,\varphi(t)$

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t g(s)\,ds}$$

Δ.Ε ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = A(x) \cdot B(y(x))$$ (παράγωγος είναι ίση με το γινόμενο 2 συναρτήσεων).

$$\overset{?}{\Rightarrow} \frac{y'(x)}{B(y(x))} = A(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $c \in \mathbb{R}$ να λυθεί το πρόβλημα $y'(t) = y^2(t)$ $y(0) = c$.

Λύση:

(α) Θέλω να διαιρέσω (για να χωρίσω μεταβλητές).

Δεν μπορώ να διαιρέσω αν $c=0$ τότε το πρόβλημα $y'(t) = y^2(t)$
$y(0) = 0$

Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(t) = 0$ $t \in \mathbb{R}$ είναι μία λύση του προβλήματος. (Υπάρχουν άλλες λύσεις;)

(β) Αν $c > 0 \Leftrightarrow y(0) = c > 0$

Βρίσκω λύσεις = βρίσκω μία συνάρτηση c που είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και επομένως συνεχής στο 0, $y(0) > 0$

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0$ ώστε $y(t) > 0$ $t \in (-\delta, \delta)$

Ειδικότερα παίρνω το διάστημα $(a, b) \ni 0$ ώστε $y(t)$ ορίζεται στο (a, b) και είναι τ.ω $y(t) > 0$, $t \in (a, b)$.

(Παίρνω ανοιχτό διάστημα γιατί μου δίνει συνέχεια)

Τότε στο $t \in (a, b)$ έχουμε $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)} = 1 \quad t \in (a, b)$

$$\left(-\frac{1}{y(t)}\right)'$$

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)}\,ds = \int_0^t 1\,ds \qquad t \in (a, b)$$

$$\Leftrightarrow y(s) = x \qquad 0 \leq s \leq t$$

$$\downarrow$$

$$y(s) = c$$

$$\Rightarrow \int_c^{y(t)} \frac{dx}{x^2} = t \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_c^{y(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_c^{y(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{c} = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} = -t + \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow 1 = y(t)\left(\frac{1}{c} - t\right) \quad (1)$$

Παρατηρώ ότι $\frac{1}{c} - t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{c} > 0$

Ειδικότερα απαιτώ $\frac{1}{c} - t > 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{t < \frac{1}{c}}$$

$$1) \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} - t}, \quad t \in \left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$$

(γ) Αν $c < 0 \Rightarrow \ldots \; 1 = y(t)\left(\frac{1}{c} - t\right)$

$$\Downarrow$$

$$y(0) = c < 0$$

$$\Downarrow$$

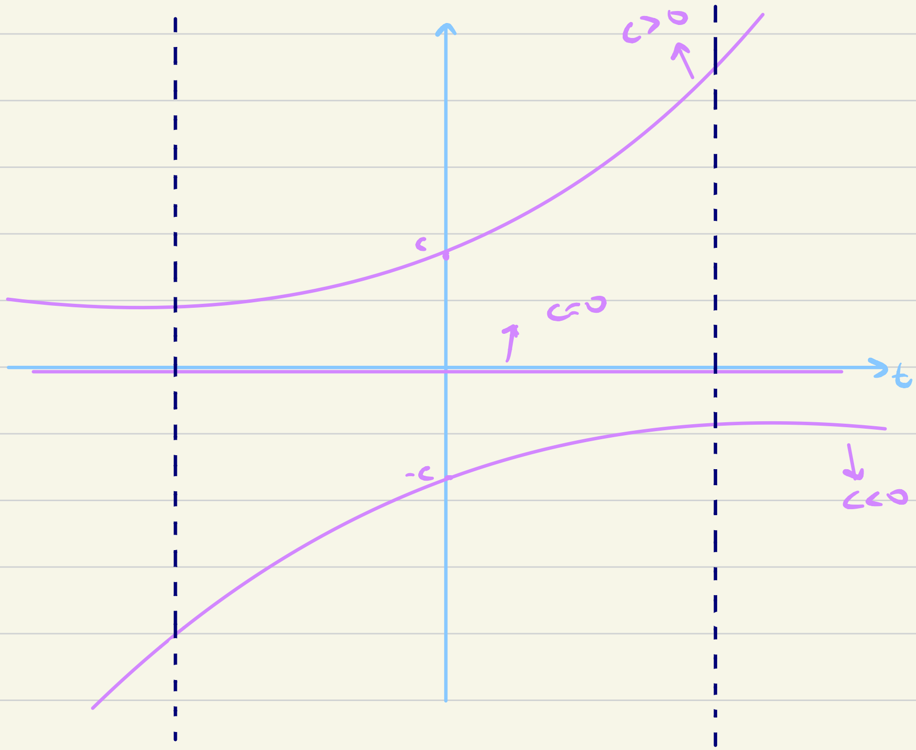
$\exists\ \delta > 0 \quad y(t) < 0 \quad t \in (-\delta, \delta)$ και επιλέγουμε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα $(a, b) \ni 0$

$y(t) < 0, \quad t \in (a, b)$

Πρέπει $\frac{1}{c} - t < 0 \Leftrightarrow \boxed{t > \frac{1}{c}}$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} - t}$$

$$\frac{1}{c} < t \Leftrightarrow \frac{1}{c} - t < 0.$$



c>0
c
c=0
t
-c
c<0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Να λυθεί το πρόβλημα $y'(t) = y^{1/3}(t)$ $y(0)=0$.

Λύση:

Μια λύση είναι η $y_0(t)=0$ $t\in\mathbb{R}$

Έστω $b(t)$ λύση που δεν είναι $y(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$ οπότε $\exists\, t_1\in\mathbb{R}$

$y(t_1)\neq 0$, λόγω της συνέχειας της y στο t_1.

$$\begin{cases} y(t_1)>0 \\ y(t_1)<0 \end{cases}$$

(α) $y(t_1)>0$, λόγω συνέχειας της y στο t_1 $\exists\, \delta>0$ ώστε

$y(t)>0$ $\forall\, t\in(t_1-\delta, t_1+\delta)$

και επιλέγουμε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα $(a,\beta)\supseteq(t_1-\delta, t_1+\delta)$

με την ιδιότητα $y(t)>0$ $\forall$ $t\in(1,\beta)$

$\Rightarrow y \uparrow$ στο (a,β)

και έχουμε: $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{t_1}^{t} \frac{y'(s)}{y^2(s)}\,ds = \int_{t_1}^{t} 1\,ds = t-t_1$

$$\int_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{du}{ds} = t-t_1$$

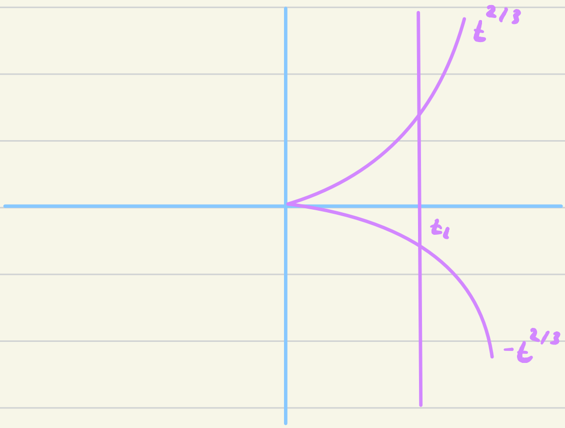
$$\int_{y(t_1)}^{y(t)} u^{-1/3}\,du = t-t_1 \Leftrightarrow \left(\frac{u^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{y(t_1)}^{y(t)} = t-t_1 \qquad t\in(a,\beta)$$

$$\frac{3}{2}\left(y^{2/3}(t) - y^{2/3}(t_i)\right) = t - t_i \iff y^{2/3}(t) = \frac{2}{3}\left(y^{2/3}(t_i) - t_i + t\right)$$

$y^{2/3}(t_i) - t_i = 0 \iff t_i > 0$

$y^2(t_i) = t_i^3$

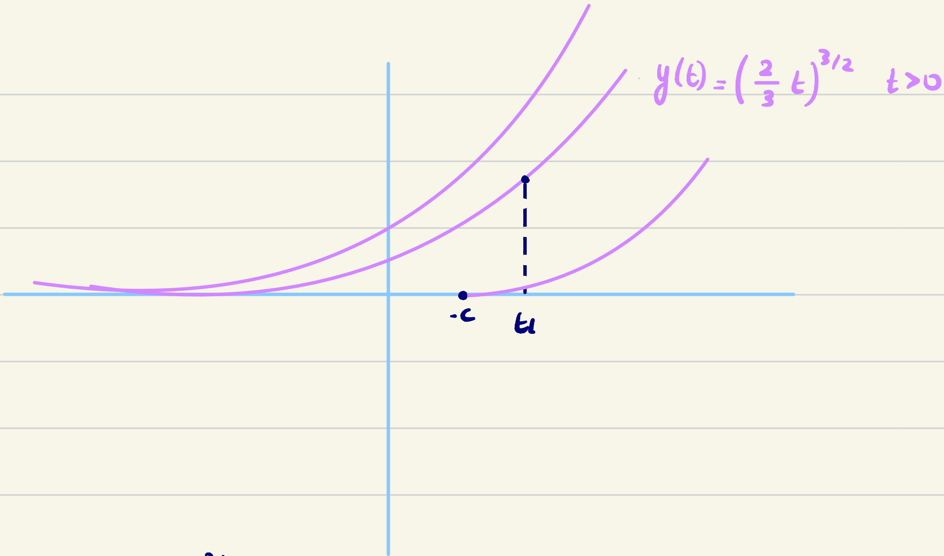
$$\Rightarrow y(t_i) = \begin{cases} t_i^{2/3} \\ -t_i^{2/3} \end{cases}$$



Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $y(t_i) = t_i^{3/2} \Rightarrow y^{2/3}(t) = \frac{2}{3}\left(y^{2/3}(t_i) - t_i + t\right)$ $\quad y(t) > 0$

$$= \frac{2}{3}t \iff y(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$$



$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}y\right)^{3/2}, & t>0\\ 0, & t\leq 0\end{cases} \qquad \Rightarrow y_c(t)=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}(c+t)^{3/2}\right), & t>-c\\ 0, & t\leq -c\end{cases}$$

Είναι παραγωγίσιμη

Άρα είναι λύση του προβλήματος.

(ii) Αν $c=y^{2/3}(t_1)-t_1>0$

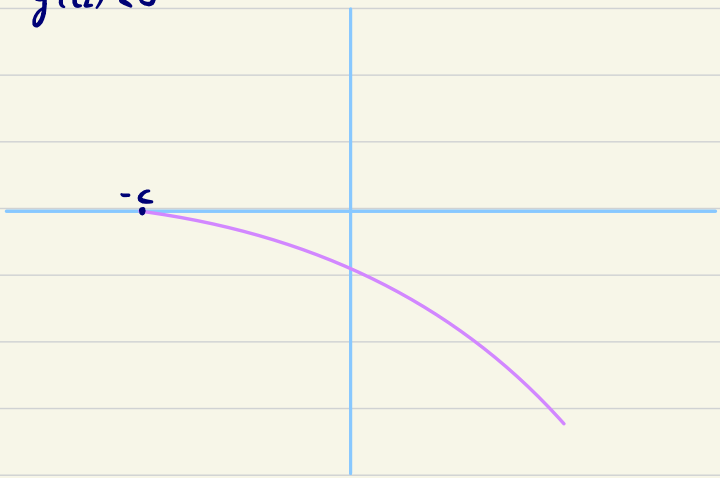
Τότε η $y^{2/3}(t)=\frac{2}{3}(c+t)$

είναι πάντα >0 γιατί $t>0$ και $c>0$.

$\Rightarrow y(t)=\left(\frac{2}{3}(c+t)\right)^{3/2}>0$ αν $t+c>0 \Rightarrow t>-c$

$$y_c(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}(t+c)^{3/2} & t>-c\\ 0 & t\leq -c\end{cases}$$

(B) $y(t_1) < 0$



$$\hat{y}_c(t) = \begin{cases} 0, & t \le -c \\ -\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^{3/2} & t > -c. \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= c \end{aligned}\right\} \circledast$$

και η f ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschit, δηλαδή
$(t, y)\ (t, x) \in [a, b] \times [c, d] \Rightarrow \exists\ L > 0$
$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L\, |x - y|$
Το πρόβλημα $\circledast$ έχει το πολύ μια λύση.
$|y^{1/3} - 0| \leq L\,|y| \Leftrightarrow 1 \leq L\, |y|^{2/3} \quad y \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

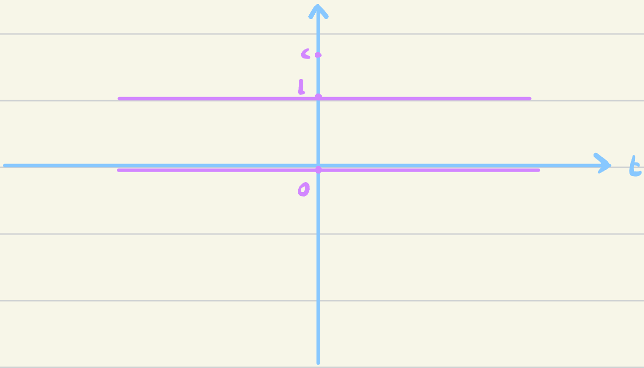
Να λυθεί το πρόβλημα $y'(t) = y(t)(1 - y(t)) \quad y(0) = c$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $c = 0$, $c = 1$, $c > 1$, $0 < c < 1$, $c < 0$.

(i) Αν $c = 0$ μια προφανής λύση είναι $y_0(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) Αν $c = 1$ μια προφανής λύση είναι $y_1(t) = 1 \quad t \in \mathbb{R}$



(iii) Αν $c>1$ $y(0)=c>1$ λόγω συνέχειας $\exists\ \delta>0 : y(t)>1$ $t\in(-\delta,\delta)$ και επιλέγουμε $(a,b)\supseteq(-\delta,\delta)$ το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα ώστε $y(t)>1$ $t\in(a,b)$.

Για $t\in(a,b)$, $y(t)>1 \Rightarrow y'(t)=y(t)(1-y(t))<0$ και επομένως $y \downarrow$ (a,b)

Μπορούμε να διαιρέσουμε

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}=1$$

Ολοκληρώνω στο διάστημα όπου η $y(t)$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

20/02/2024

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $c \in \mathbb{R}$ να λυθεί το ΠΑΤ (Πρόβλημα Αρχικών Τιμών)

$$y'(t) = \boxed{y(t)(1-y(t))} \rightarrow \text{Παραβολή}$$
$$y(0) = c$$

Λύση:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)(1-y(t))} = 1$$

Διακρίνω σε περιπτώσεις:

- $c=0 \quad y'(t) = y(t)(1-y(t))$
  $y(0) = 0$

μια λύση είναι $y_0(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$ είναι λύση.

- $c = 1 \Rightarrow y'(t) = y(1-y)$
  $y(0) = 1$

μια λύση είναι $y_1(t) = 1, \ t \in \mathbb{R}$

- $c > 1 \Rightarrow y(0) = c > 1$, επειδή η λύση είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής, λόγω της συνέχειας της y στο $t=0 \Rightarrow \exists \ \delta > 0 : y(t) > 1 \quad t \in (-\delta, \delta)$

παίρνω ειδικότερα το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα $(-\delta, \delta) \subseteq (a, b)$ και έχει την ιδιότητα $y(t) > 1, \ t \in (a, b)$

$$y(t)(1-y(t))<0$$

$$\Rightarrow y'(t)=y(t)(1-y(t)) \quad , t\in(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}=1$$

$$\underset{z=y(s)}{\Rightarrow} \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)(1-y(s))}\,ds=\int_0^t 1\,ds$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{y(t)} \frac{dz}{z(1-z)}=t$$

$$\Leftrightarrow \int_c^{y(t)} \frac{dz}{(1-z)}=t$$

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z-1}=\frac{a(z-1)+bz}{z(z-1)}$$

$$\Leftrightarrow -1=(a+b)z-a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+b=0 \\ -a=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=-1 \\ a=1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{y(t)}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)dz=t \Leftrightarrow (\ln z-\ln(z-1))\Big|_c^{y(t)}=t \quad , t\in(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \ln y(t)-\ln(y(t)-1)-(\ln c-\ln(c-1))=t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{y(t)-1}\right)-\ln\frac{c}{c-1}=t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{y(t)}{y(t)-1}}{\frac{c}{c-1}}\right)=t \Leftrightarrow \frac{\frac{y(t)}{y(t)-1}}{\frac{c}{c-1}}=e^t$$

$$\frac{y(t)}{y(t)-1} = \frac{\frac{c}{c-1}\cdot e^t}{1} \Leftrightarrow \frac{y(t)}{y(t)-(y(t)-1)} = \frac{\frac{c}{c-1}\cdot e^t}{\frac{c}{c-1}\cdot e^t - 1}$$

$$y(t) = \frac{\frac{c}{c-1}\cdot e^t}{\frac{c}{c-1}\cdot e^t - 1}$$

Με την προϋπόθεση $\frac{c}{c-1}e^t - 1 \neq 0 \ \forall\, t \in (a, b)$

Ελέγχω πότε $\frac{c}{c-1}\cdot e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{c-1}{c}$

$\Leftrightarrow t_0 = \ln\left(\frac{c-1}{c}\right) < 0$

$$\lim_{t\to t_0^+} y(t) = \lim_{t\to t_0^+}\left(\frac{\frac{c}{c-1}\cdot e^t}{\frac{c}{c-1}\cdot e^t - 1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{t\to +\infty} y(t) = 1$$

- $0 \leq c < 1 \Rightarrow$ Λόγω της συνέχειας της y στο $t=0 \Rightarrow \exists\, \delta' > 0$
  $0 < y(t) < 1 \quad t \in (-\delta', \delta')$
  Επιλέγουμε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα (a, b)
  με την ιδιότητα: $0 < y(t) < 1$, $t \in (-\delta', \delta') \subseteq (a, b)$

• $c<0$. $\Rightarrow$ Λόγω της συνέχειας της y στο $t=0 \Rightarrow \exists\, \delta''>0$

$y(t)<0 \quad t\in(-\delta'', \delta'')$

Επιλέγουμε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα (a, b)

με την ιδιότητα $y'(t)<0$, $t\in(-\delta'', \delta'')\subseteq(a,b)$

$$\underset{z=y(s)}{\Rightarrow} \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)(1-y(s))}\,ds = \int_0^t 1\,ds$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{y(t)} \frac{dz}{z(1-z)} = t$$

$$\Leftrightarrow \int_c^{y(t)} \frac{dz}{(1-z)} = t$$

$$\frac{y(t)}{1-y(t)} = \frac{\frac{c}{1-c}\cdot e^t}{1} \Leftrightarrow \frac{y(t)}{1+\frac{c}{1-c}e^t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{\frac{c}{1-c}\cdot e^t}{1+\frac{c}{1-c}\cdot e^t}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\int_0^{y(t)}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)dz = t \Leftrightarrow \left(\ln(-z)-\ln(+z)\right)\Big|_c^{y(t)} = t, \quad t\in(a,b)$$

$$\frac{(-z)'}{-z}>0$$

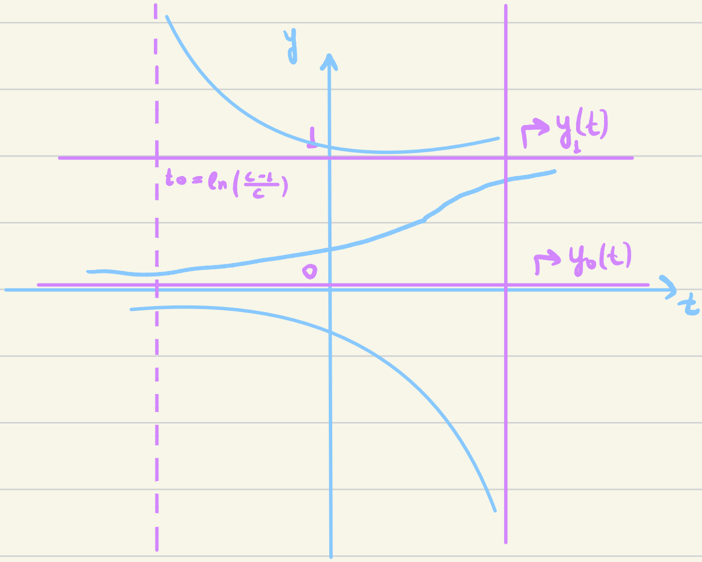
$$\Leftrightarrow \ln(-y(t))-\ln(1-y(t)) - (\ln(-c)-\ln(1-c)) = t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{-y(t)}{1-y(t)}\right) - \ln\left(\frac{-c}{1-c}\right) = t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{-y(t)}{-y(t)+1}}{\frac{-c}{1-c}}\right) = t \Leftrightarrow \frac{\frac{-y(t)}{-y(t)+1}}{\frac{-c}{1-c}} = e^t$$

$$\frac{-y(t)}{1-y(t)} = \frac{\frac{c}{-c+1}\cdot e^t}{1} \iff \frac{y(t)}{1-y(t)} = \frac{\frac{c}{c-1}\cdot e^t}{1}$$

$$y(t) = \frac{\frac{c}{-c+1}\cdot e^t}{\frac{c}{c-1}\cdot e^t + 1}$$



ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε:

$$y'(x) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

Πότε η f ομογενείς ομογένειας m:

Όταν $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$ $\lambda > 0$ $x, y \in \mathbb{R}$.

Όταν f, g έχουν την ίδια ομογένεια m.

ω.χ. $y' = \dfrac{x^3 + 3xy^2}{x^2 y + y^3}$

Είναι ομογενείς Δ.Ε διότι: $(\lambda x)^3 + 3(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 x^3 + 3\lambda x + \lambda^2 y^2$

$= \lambda^3 (x^3 + 3xy^2)$

$(\lambda x)^2 (\lambda y) + (\lambda y)^3 = \lambda^3 (x^2 y + y^3)$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ Δ.Ε:

Θέτουμε $\dfrac{y}{x} = z \iff \boxed{y(x) = x \cdot z(x)}$

Η Δ.Ε $y'(x) = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} \Rightarrow (x \cdot z(x))' = \dfrac{f(x, xz(x))}{g(x, xz(x))}$

$$= \frac{x^m f(1, z(x))}{x^m g(1, z(x))}$$

$z(x) + xz'(x) = H(z) \iff \boxed{xz'(x) = H(z) - z}$ $\qquad \dfrac{z(x)}{H(z(x) \cdot z(x))} = \dfrac{1}{x}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί το ΠΑΤ $y'(x) = \dfrac{y(x) - x}{y(x) + x}$

$y(1) = 1$

Λύση:

$$y'(x) = \frac{f(x, g(x))}{g(x, g(x))}$$

$f(x,y) = y - x$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y = \lambda(x-y) = \lambda \cdot f(x,y)$

$g(x,y) = y + x$ $\quad g(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \lambda x = \lambda(x+y) = \lambda \cdot g(x,y)$

Θέτουμε $y(x) = x z(x)$ τότε η Δ.Ε γράφεται:

$$(x z(x))' = \frac{x \cdot z(x) - x}{x z(x) + x}, \quad x > 0$$

$$z(x) + x z'(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} \iff x z'(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} - z(x)$$

$$x z'(x) = \frac{z(x) - 1 - z(z+1)}{z(x) + 1}$$

$y(1) = 1 \iff 1 \cdot z(1) = 1$

$\Rightarrow z(1) = 1$

$$x z'(x) = \frac{z(x) - 1 - z^2(x) - z(x)}{z(x) + 1}$$

$z(1) = 1 \quad z(x) \neq -1 \quad 1 + z(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$

Δ.Ε: $\dfrac{z'(x)}{\dfrac{1+z^2(x)}{1+z(x)}} = -\dfrac{1}{x} \iff \dfrac{1+z}{1+z^2}\cdot z = -\dfrac{1}{x}$ $\quad (a,b) \subseteq (0,+\infty)$

$$\int_1^t \frac{1+z(x)}{1+z^2(x)}\, z'(x)\, dx = \int_1^t -\frac{1}{x}\, dx$$

$$\int_{z(1)}^{z(t)} \frac{1+y}{1+y^2}\, dy = -\ln t$$

$$\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$