Έστω f, g παραγωγίσιμη 22/02/2024

$f'(x) = g'(x) \quad x \in (0,1)$ (εδώ δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε γιατί δεν ξέρουμε αν η f είναι ολοκληρώσιμη).

$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = 0$

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \quad f(x) - g(x) = c \quad x \in (0,1)$

Ολοκλήρωση: $x, x_1 \in (0,1) \quad \int_x^{x_1} (f(s) - g(s))'\,ds = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) - (f(x_1) - g(x_1)) = 0$

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Να λυθεί $y'(x) = \dfrac{y-x}{y+x}$ (είναι ομογενείς γιατί $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda y - \lambda x$
$= \lambda (y-x)$
$= \lambda f(x-y)$).

Λύση:

Θέτουμε $\dfrac{y}{x} = z \iff y(x) = xz(x) \quad x > 0.$

$\Rightarrow y'(x) = z(x) + xz'(x)$

Δ.Ε $\quad z(x) + xz'(x) = \dfrac{xz(x) - x}{xz(x) + x}$

$= \dfrac{z(x)-1}{z(x)+1}$

$xz'(x) = \dfrac{z(x)-1}{z(x)+1} - z(x)$

$= \dfrac{z^2(x)+1}{z(x)+1}$

$= \dots$

Παράδειγμα 2:

Να λυθεί $y'(x) = \dfrac{y-x-1}{y+x-3}$ (ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ).

Λύση:

Θα επιλύσουμε αρχικά το σύστημα $\left.\begin{matrix} y-x-1=0 \\ y+x-3=0 \end{matrix}\right| \iff \left| \begin{matrix} y_0=2 \\ x_0=1 \end{matrix}\right.$

Θέτουμε $y(x)=2+z(\omega)$

$x=1+\omega$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{d}{dx}z(\omega) = \frac{dz}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx} = \dot{z}(\omega)$$

$$\dot{z}(\omega) = \frac{2+z-(1+\omega)-1}{2+z+1+\omega-3} \iff \dot{z}(\omega) = \frac{z-\omega}{z+\omega}$$

ΠΛΗΡΕΙΣ Δ.Ε:

$$\underbrace{f(x,y)+g(x,y)\cdot y'(x)}_{\displaystyle \frac{d}{dx}\left[F(x,y(x))\right]}=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x,y(x))\right]=0 \Rightarrow F[x,y(x)]=0$$

Αν υπάρχει τότε $\displaystyle \frac{d}{dx}\left[F(x,y(x))\right]=\frac{dF}{dx}(x,y(x))+\frac{dF}{dy}(x,y(x))\frac{dy}{dx}$

$$=F_x(x,y(x))+F_y(x,y(x))\cdot y'(x)$$

Οπότε ισχύει:
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}F(x,y)=f(x,y) \\ &\frac{d}{dy}F(x,y)=g(x,y)\end{aligned}}\qquad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$

Θ. ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

$$H(x,y)=0 \longrightarrow y=y(x)$$

$$\left.\begin{aligned}&H(x_0,y_0)=0\\ &\frac{dH}{dy}(x_0,y_0)\neq 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists\ \delta>0\ (x_0-\delta,x_0+\delta):\ \begin{aligned}&y=y(x)\\ &y(x_0)=y_0 \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\end{aligned}$$

Αν F 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη:

$$\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}F(x,y)=\frac{d}{dy}f(x,y)$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dy}F(x,y)=\frac{d}{dx}g(x,y)$$

$$\frac{d^2}{dy\,dx} F(x,y) = \frac{d}{dy} f(x,y)$$

$$\frac{d^2}{dx\,dy} F(x,y) = \frac{d}{dx} g(x,y)$$

$$F \in C^2 \Rightarrow \frac{d^2}{dx\,dy} F = \frac{d^2}{dy\,dx} F$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί $\quad 2x + y^2(x) + 2xy \cdot y'(x) = 0$

Λύση:

$f(x,y) = 2x + y^2 \Rightarrow \frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(2x+y^2) = 2y$

$g(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(2xy) = 2y$

Θα βρούμε την F: $F_x(x,y) = 2x + y^2$

$= \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2)$

$\frac{d}{dx}\left[F(x,y) - x^2 - xy^2\right] = 0$

$F(x,y) - x^2 - xy^2 = \varphi(y)$

$\Rightarrow F(x,y) = x^2 + xy^2 + \varphi(y)$

$\frac{dF}{dy} = 2xy + \varphi'(y)$

$= 2xy$

$\Rightarrow \varphi'(y) = 0$

$\Rightarrow \varphi(y) = c,\ c \in \mathbb{R}. \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2(x)) = 0 \Rightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}.\quad \boxed{x^2 + xy^2 = c}$

$\frac{d}{dx} G(x,y) = 0$

$G(x,y) - G(x_0,y) = (x - x_0)\frac{d}{dx} G(\xi,y)$

$\Rightarrow G(x,y) = c(y)$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: 27/02/2024

(1) $y' + g(t)y = h(t)$ πολ. Euler

$(\mu(t) \cdot y(t))' = \mu(t) \cdot h(t)$

(2) Χωριζόμενων μεταβλητών

$y' = Q(y(t))\ G(t) \overset{?}{\iff} \dfrac{y(t)}{Q(y(t))} = G(t)$

(3) Ομογενής Δ.Ε

$y' = \dfrac{f(t,y)}{g(t,y)}$

$f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^m f(t,y) \qquad \lambda > 0$

$g(\lambda t, \lambda y) = \lambda^m \cdot g(t,y) \qquad \dfrac{y}{t} = z$

$\Rightarrow$ οδηγούμαστε σε χωριζόμενων μεταβλητών.

(4) $y'(t) = \dfrac{f(t,y)}{g(t,y)} \iff \boxed{f(t,y) - g(t,y) - y'(t) = 0}$

ΠΛΗΡΗΣ ΑΚΡΙΒΗΣ:

Όταν μπορώ να ολοκληρώσω $\dfrac{d}{dt} F(t, y(t)) = 0$

$\Rightarrow \exists$ μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε: $F(t, y(t)) = c$

Είδαμε: $F_t(t, y(t)) + F_y(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0 \Rightarrow F, f, g$ συνδέονται.

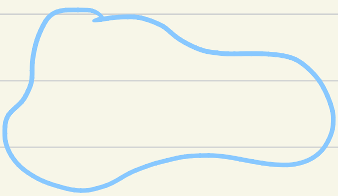
$$\frac{d}{dt} F(t,y) = f(t,y) \quad \text{όπου } \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dy} F(t,y) = g(t,y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Green:

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D Q_x(x,y) - P_y(x,y))\,dx\,dy$$

Έχουμε ένα φραγμένο χωρίο το οποίο πρέπει όταν κάθε 2 σημεία του με μια καμπύλη που είναι βρίσκεται μέσα στο χωρίο



Το χωρίο είναι "απλά" συνεκτικό

Το χωρίο είναι συνεκτικό αλλά όχι "απλά" συνεκτικό.

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\frac{d}{dt} F(t,y) = \frac{d}{dy} f(t,y)$$

$$\|$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{d}{dy} F(t,y) = \frac{d}{dt} g(t,y) \quad \text{άρα θα πρέπει} \quad \boxed{\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dt}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί $\underbrace{y\cos x + 2xe^y}_{f} + \underbrace{(\sin x + x^2e^y - 1)}_{g}\cdot y'(x) = 0$

(Να βρεθεί ένα ολοκλήρωμα της Δ.Ε)

Λύση:

$f(x,y) = y\cos x + 2xe^y \Rightarrow \frac{df}{dy}(x,y) = \cos x + 2xe^y$

$g(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1 \Rightarrow \frac{dg}{dx}(x,y) = \cos x + 2xe^y$

$\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dx}$

$\Rightarrow$ Η Δ.Ε είναι πλήρης

$\frac{d}{dx}F(x,y) = f(x,y) = y\cos x + 2xe^y$

$\frac{d}{dy}F(x,y) = g(x,y) = \sin x + xe^y - 1$

$\frac{d}{dx}F(x,y) = y\cos x + 2xe^y = \frac{d}{dx}(y\sin x + x^2e^y)$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\underbrace{(F(x,y) - y\sin x - x^2e^y)}_{Q(x,y)} = 0$

Θ.Μ.Τ $Q(x,y) - Q(x_0,y) = (x - x_0)\frac{d}{dx}Q(\xi,y)$

$$\frac{dQ}{dx}(x,y)=0 \Rightarrow Q(x,y)=Q(0,y)=A(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y)-y\sin x-x^2e^y = \underbrace{f(0,y)-y\cdot\sin 0\cdot 0^2\cdot e^y}_{\varphi(y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y)=y\sin x+x^2e^y+\varphi(y)}$$ Παραγωγίσιμη

Έχουμε ομοίως: $\frac{df}{dy}(x,y)=\sin x+x^2e^y-1 \quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dy}(y\sin x+x^2e^y+\varphi(y))\sin x+x^2e^y-1$$

$$\Rightarrow \sin x+x^2e^y+\varphi'(y)=\sin x+x^2\cdot e^y-1$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=-1=-(y)_y$$

$(\varphi(y)+y)_y=0$

$\varphi(y)+y=\varphi(0)=e$

$\Rightarrow f(x,y)=y\sin x+x^2e^y-y$

$\Rightarrow \exists\ c\in\mathbb{R}:$ $\boxed{y(x)\sin x+x^2e^{y(x)}+y(x)=e}$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ:

$$\int_a^b g'(\xi)\,d\xi = g(b) - g(a)$$

Η g' πρέπει να είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή η g' να είναι συνεχής στο $[a, b]$

⊛ $F(x) = \int_a^b f(t, x)\,dt$

Πότε η f είναι παραγωγίσιμη;

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν $f : [a, b] \times \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και επιπρόσθετα $\exists\ \frac{d}{dx} f(b, x)$ συνεχής συνάρτηση

⊛ $\Rightarrow F$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $F'(x) = \int_a^b \frac{df}{dx}(t, x)\,dt$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Γιατί αν $f,g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{df}{dy}(x,y) = \frac{dg}{dx}(x,y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

τότε $\exists \ F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\frac{dF}{dx}(x,y) = f(x,y)$ $\frac{dF}{dy}(x,y) = g(x,y)$

Απόδειξη:

Επειδή $\frac{d}{dx}F(x,y) = f(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F(x,y) - \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt\right) = 0$$

$$\Rightarrow F(x,y) - \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt = F(x_0,y) - \int_{x_0}^{x_0} f(t,y)\,dt$$

$$\Rightarrow F(x,y) = F(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}F(x,y) = \frac{d}{dy}(x_0,y) + \int_{x_0}^{y} \frac{dF}{dy}(t,y)\,dt$$

$$= \frac{d}{dy}F(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} \frac{dg}{dx}(t,y)\,dt$$

Θέλουμε επίσης $\frac{df}{dy}(x,y)=g(x,y)$

$$\frac{df}{dy}(x,y) = \frac{df}{dy}(x_0,y) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dg}{dt}(t,y)\,dt}_{g(x,y)-g(x_0,y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dy}(x,y)=g(x,y)} \longrightarrow \frac{df}{dy}(x_0,y)-g(x_0,y)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ:

Τι κάνουμε αν ΔΕΝ είναι πλήρης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Να βρούμε πολ/στή ώστε να γίνει πλήρης;

$$f(x,y)+g(x,y)\cdot y'=0$$

$$\exists \ \mu=\mu(x,y) : \mu(x,y)\cdot f(x,y)+\mu(x,y)\cdot g(x,y)\cdot y'=0$$

Να γίνει πλήρης

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(\mu f)=\frac{d}{dx}(\mu g)$$

$$\frac{d\mu}{dy} f - \mu \frac{df}{dy} = \frac{d\mu}{dx} g + \mu \frac{dg}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mu}{dy} f - \frac{d\mu}{dx} g = \mu\left(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dy}\right)} \quad (1)$$

όταν $\frac{dg}{dx} - \frac{dF}{dg} g(x,y)$ είναι συνάρτηση του x.

Περιπτωση:

$\mu = \mu(x)$

$$-\mu'(x) \cdot g(x,y) = \mu\left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy}\right) \Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy}}{g(x,y)}$$

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy}}{f(x,y)} = 0$$

Παραδειγμα:

Να λυθεί $3xy + y^2 + (x^2+xy)y'(x) = 0$ εαν είναι γνωστό ότι ένας ολοκληρωτής παράγοντας $\frac{1}{xy(2x+y)}\left(3xy + y^2 + (x^2+xy)\cdot y'\right) = 0$

Λύση:

$$\frac{1}{xy(2x+y)}\left(3xy + y^2 + (x^2+xy)\cdot y'\right) = 0 \Rightarrow \frac{3xy + y^2}{xy(2xy)} + \frac{x^2+xy}{xy(2x+xy)} y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{3x+y}{x(2x+y)}}_{f(x,y)} + \underbrace{\frac{x+y}{y(2x+y)}}_{g(x,y)} y'(x) = 0$$

$$\frac{df}{dy}(x,y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{3x+y}{2x^2+xy}\right) = \frac{\frac{d}{dy}(3x+y)(2x^2+xy) - (3x+y)\frac{d}{dy}(2x^2+xy)}{(2x^2+xy)^2}$$

$$= \frac{2x^2+xy-3x^2-xy}{(2x^2+xy)^2}$$

$$= \frac{-x^2}{(2x^2+xy)^2}$$

$$= \frac{-1}{(2x+xy)^2}$$

$$\frac{dg}{dx}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{2x+y^2}\right) = \frac{(2x-(xy)\cdot 2y)}{(2xy+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy+y^2-2xy-2y^2}{(2xy+y^2)^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2(2x+y)^2}$$

$$= \frac{-1}{(2x+y)^2}$$

$$\frac{dF}{dx}(x,y) = f(x,y) = \frac{3x+y}{x(2x+y)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+y} = \frac{d}{dx}\left(\ln x + \frac{1}{2}\ln x(2x+y)\right)$$

$$\frac{df}{dy}(x,y) = g(x,y) = \frac{x+y}{y(2x+y)}$$

$$\frac{3x+y}{x(2x+y)} = \frac{A(y)}{x} + \frac{B(y)}{2x+y} = \frac{(2x+y)\cdot A(y) + B(y)}{x(2x+y)}$$

$$B + 2A = 3 \Rightarrow B = 1$$

$$y\,A(x) = y \Rightarrow A = 1$$

$$\frac{d}{dx}(f(x,y)) - \ln x - \frac{1}{2}\ln(2x+y) = 0$$

$$f(x,y) = \ln x + \frac{1}{2}\ln(2x+y) + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dy} = \frac{1}{2(2x+y)} + \varphi'(y)$$

$$= \frac{x+y}{y(2x+y)}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x+y}{y(2x+y)} - \frac{1}{2(2x+y)}$$

$$= \frac{2(x+y) - y}{2y(2x+y)}$$

$$= \frac{\cancel{2x+}y}{2y(\cancel{2x+}y)} = \frac{1}{2y}$$

$\Rightarrow \varphi'(y) = \dfrac{1}{2y}$

$\Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2} \ln(y)$

$\ln x + \frac{1}{2} \ln(2x+y) + \frac{1}{2} \ln y = e$

$\Rightarrow \ln x \cdot (2x+y)^{1/2} y^{1/2} = e$

$x\,(2x+y)^{1/2} \cdot y^{1/2} = k \Rightarrow \boxed{x^2 (2x+y) y = e}$

ΠΛΗΡΗΣ Δ.Ε:

29/02/2024

$f(x,y) + g(x,y) \cdot g'(x) = 0$

Είναι πλήρης αν $\frac{df}{dy}(x,y) = \frac{dg}{dx}(x,y)$ τότε $\exists$ $F(x,y)$:

- $\frac{dF}{dx}(x,y) = f(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt\right)$

- $\frac{dF}{dy}(x,y) = g(x,y)$

(Θ. Green) $$\boxed{F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (g,f)\,d\vec{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} g\,dx + f\,dy}$$

Αν δεν είναι πλήρης επιχειρούμε:

$\mu(x,y)\,f(x,y) + \mu(x,y) \cdot g(x,y) \cdot c' = 0$

$d_y(\mu f) = d_x(\mu g)$

$$\boxed{\mu_y f - \mu_x g = \mu(g_x - f_y)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί $\underbrace{(3xy+6y^2)}_{\text{ομογένειας } 2}+\underbrace{(2x^2+9xy)}_{\text{ομογένειας } 2}y'(x)=0$ (ομογενείς)

Λύση:

Εάν είναι γνωστό ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής:

$\mu(x,y)=f\left(\frac{z}{xy}\right)$

$$\overset{z=xy}{\Rightarrow} d_y\left(f(z)(3xy+6y^2)\right)=d_x\left(f(z)(2x^2+9xy)\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(z)\frac{dz}{dy}(3xy+6y^2)+f(z)(3x+12y)=f'(z)\frac{dz}{dx}(2x^2+9xy)$$

$$\Leftrightarrow f'(z)\,x\,(3xy+6y^2)+f(z)(3x+12y)=f'(z)\,y(2x^2+9xy)+f(z)(4x+9y)$$

$$\Leftrightarrow f'(z)(3x^2y+6xy^2-2x^2y-9xy^2)=f(z)(4x+9y-3x-12y)$$

$$\Leftrightarrow f'(z)(x^3y-3xy^2)=f(z)(x-3y)$$

$$\Leftrightarrow f'(z)\,xy\,(x-3y)=f(z)(x-3y) \qquad \boxed{f(z)=z}$$

$$\Leftrightarrow z f'(z)(x-3y)=f(z)(x-3y)$$

Επιλέγω $z f'(z)=f(z) \Leftrightarrow \int \frac{f'(z)}{f(z)}=\int\frac{1}{z} \Rightarrow \ln(f(z))=\ln z$

$$xy\left((3xy+6y^2)+(2x^2+9xy)\,y'(x)\right)=0$$

$$\boxed{3x^2y^2+6xy^3+(2x^3y+9x^2y^2)\cdot y'(x)=0}$$

Είναι ακριβής; $\frac{d}{dy}(3x^2y^2+6xy^3) = 6x^2y+18xy^2$

$\frac{d}{dx}(2x^3y+9x^2y^2) = 6x^2y+18xy^2$

Θα βρούμε $F(x,y)$ ώστε: ① $F_x(x,y) = 3x^2y^2+6xy^3 = \frac{d}{dx}(x^3y^2+3x^2y^3)$

$F_y(x,y) = 2x^3y+9x^2y^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(F(x,y)-x^3y^2-3x^2y^3)=0$

$\Rightarrow F(x,y) = x^3y^2-3x^2y^3 = \varphi(y)$

$$\boxed{F(x,y) = x^3y^2-3x^2y^3 = \varphi(y)}$$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}F(x,y) = 2x^3y+9x^2y^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}(x^3y^2+3x^2y^3+\varphi(y)) = 2x^3y+9x^2y^2$

$\Leftrightarrow 2x^3+9x^2y^2+\varphi'(y) = 2x^3y+9x^2y^2 \Leftrightarrow \varphi'(y)=0$

$F(x,y) = x^3y^2+3x^2y^3$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3y^2(x)+3x^2y^3(x)) = \boxed{\begin{matrix}3x^2y^2\\6xy^3\end{matrix}} \begin{matrix}+\\+\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}2x^3y(x)\\9x^2y^2(x)\end{matrix}} \begin{matrix}\cdot y'(x)\\\cdot y'(x)\end{matrix} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x^3y^2(x)+3x^2y^3(x)=0}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί $y+(y-x)y'(x)=0$ αν είναι γνωστό ότι έχει πολλαπλασιαστή της μορφής $\mu(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)$

Λύση:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)\cdot(y-x)\cdot y'(x)=0$$

$\xi=\frac{y}{x}$

$\xi_y=\frac{1}{x}$

$\xi_x=-\frac{y}{x^2}$

$$d_y\left(f(\xi)y\right)=d_x\left(f(\xi)(y-x)\right)$$

$$f'(\xi)\xi_y\,y+f(\xi)=f'(\xi)\xi_x(y-x)+f(\xi)(-1)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)\,\frac{y}{x}+f(\xi)=f'(\xi)\left(-\frac{y}{x}\right)\frac{(y-x)}{x}-f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)\cdot\xi+f(\xi)=f'(\xi)\cdot(-\xi)\cdot(\xi-1)-f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)\cdot\xi\,(1+\xi-1)=-2f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)\xi^2=-2f(\xi)$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{2}{\xi^2}\Rightarrow \ln f(\xi)=\frac{2}{\xi}\Rightarrow f(\xi)=e^{2/\xi}$$

Δ.Ε.: $e^{2\frac{x}{y}}y+e^{\frac{2x}{y}}(y-x)\cdot y'(x)=0$

$$F_x(x,y)=y\cdot e^{\frac{2x}{y}}$$

$$F_y(x,y)=e^{\frac{2x}{y}}(y-x)$$