ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Bernoulli:

05/02/2024

$$y'(x) = g(x)\cdot y + h(x)\cdot y^a \iff \underbrace{\varphi(x)\cdot y'(x) - \varphi g(x)\cdot y} = \varphi(x)\cdot h(x)\cdot y^a$$

$$(\varphi(x)\cdot y)' = \varphi(x)\cdot h(x)\cdot y^a$$

$$z' = \varphi(x)\cdot h(x)\, z^a$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί $y'(x) = \frac{1}{4x} y(x) + \frac{x}{y^3(x)}$ με $y(1) = 1$.

Λύση:

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $y'(x) - \frac{1}{4x} y(x) = \frac{x}{y^3(x)} \overset{\circledast}{\iff}$ $x > 0$

Επιλέγουμε το φ να ικανοποιεί:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{4x}\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{4x}$$

$$\Rightarrow (\ln(\varphi(x)))' = (-\tfrac{1}{4}\ln x)$$

$$\varphi(x) = x^{-1/4}$$

$$\iff \underbrace{\varphi(x)\cdot y'(x) - \frac{\varphi(x)}{4x} y(x)} = \frac{x\varphi(x)}{y^3(x)}$$

$$(\varphi(x)\cdot y(x))' = \varphi(x)\cdot y'(x) + \varphi'(x)\cdot y(x)$$

$$\circledast \quad x^{-1/4} y'(x) - \frac{x^{-1/4}}{4x} y(x) = \frac{x^{1-1/4}}{y^3(x)}, \quad x > 0$$

$$\iff \left(\frac{y(x)}{x^{-1/4}}\right)' = \frac{x^{3/4}}{y^3(x)} \quad (1)$$

Θέτουμε $z(x) = \frac{y(x)}{x^{1/4}} \iff y(x) = x^{1/4} \cdot z(x)$

① $\iff z'(x) = \frac{x^{3/4}}{(x^{1/4} z(x))^3} = \frac{1}{z^3(x)}$, $x>0$

$y(1) = 1 \iff z(1) = 1$

$z(1) = 1$ $\exists\ \delta>0: x\in(1-\delta, 1+\delta)$, $z(x)>0$ και επιλέγω το (α,β) το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα $z(x)>0$ $x\in(\alpha,\beta) \supseteq (1-\delta, 1+\delta)$

Τότε: $z'(x) = \frac{1}{z^3(x)} \iff z^3(x)\cdot z'(x) = 1 \iff \left(\frac{z^4(x)}{4}\right)' = (x)'$

$\iff \left(\frac{z^4(x)}{4}\right)' = 0 \iff \frac{z^4(x)}{4} - x = \frac{z^4(1)}{4} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ $x\in(\alpha,\beta)$ $x>0$.

Οπότε: $z^4(x) - 4x = -3 \Rightarrow z^4(x) = 4x - 3$ όπου $z^4(x)>0$ άρα και

$4x - 3 > 0 \iff x > \frac{3}{4}$

$\Rightarrow z(x) = (4x-3)^{1/4}$, $x > \frac{3}{4}$

$\Rightarrow y(x) = x^{1/4} z(x) = x^{1/4}(4x-3)^{1/4}$, $x > \frac{3}{4}$

Διαφορετικά: $w(x) = y^{1-\alpha} = y^{1-(-3)} = y^4(x)$, $x>0$

$w'(x) = 4y^3(x)\cdot y'(x)$

και η Δ.Ε: $y' = \frac{1}{4x} y + \frac{x}{y^3} \iff y^3(x)\cdot y'(x) = \frac{1}{4x} y^{1+3}(x) + x$

$y' = \frac{1}{4x} y + \frac{x}{y^3} = \frac{1}{4x} y + x y^{-3}$

$y(1) = 1$

Riccati:

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$$

Εαν γνωρίζουμε μια λύση αυτή $y_1(x)$, τότε αν θέτουμε $y(x) = y_1(x) + z(x)$

τότε η Δ.Ε γίνεται: $y_1'(x) + z'(x) = f(x) + g(x)\,(y_1(x) + z(x)) + h(x)\,(y(x) + z(x))^2$

$\Rightarrow y_1'(x) + z'(x) = \cancel{f(x)} + g(x)\cancel{y_1(x)} + g(x)\cdot z(x) + h(x)\cdot\cancel{y_1^2(x)} + 2h(x)\,y_1(x)z(x) + h(x)\,z^2(x)$

$\Leftrightarrow \cancel{f(x)} + g(x)\cancel{y_1(x)} + h(x)\cancel{y_1^2(x)} + z'(x) =$ "

$$z'(x) = g(x)z(x) + 2h(x)\,y_1(x)\,z(x) + h(x)z^2(x)$$

$$= \{g(x) + 2h(x)y_1(x)\}\,z(x) + h(x)\cdot z^2(x)$$ Bernulli

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί $y'(t) = 1 + t^2 - 2ty + y^2(t)$

$$= 1 + (y(t) - t)^2$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι μια λύση του προβλήματος είναι η $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$

και θέτουμε $y(t) = t + w(t)$ η Δ.Ε γράφεται: $1 + w'(t) = 1 + w^2(t)$

και επομένως $w'(t) = w^2(t)$

Μια προφανής λύση είναι η $w(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$

Έστω τώρα $\exists\ t_1 \in \mathbb{R}: w(t_1) \neq 0$

Διακρίνουμε σε περιπτώσεις:

(i) $w(t_1)>0$:

Λόγω συνέχειας της w στο t_1 $\exists\ \delta>0 : \forall\ t\in(t_1-\delta,\ t_1+\delta)$ $\ w(t)>0$.
Επιλέγουμε (α,β) το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα ώστε $w(t)>0$,
$\forall\ t\in\ (t_1-\delta,\ t_1+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$

Τότε $\dfrac{w'(t)}{w^2(t)}=1 \iff \left(\dfrac{-1}{w(t)}\right)'=(t)'$

$$\iff \left(\frac{-1}{w(t)}-t\right)'=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{w(t)}+t=\frac{1}{w(t_1)}+t_1\ ,\quad t\in(\alpha,\beta)$$

$$\iff \frac{1}{w(t)}=\frac{1}{w(t_1)}+t_1-t>0 \iff t<\frac{1}{w(t_1)}+t_1=t^*$$

$$\iff w(t)=\frac{1}{w(t_1)+t_1-t}$$

Τότε $\dfrac{1}{w(t_1)}+t_1-t=0$;

$$t^*=\frac{1}{w(t_1)}+t_1 \iff t^*-t_1=\frac{1}{w(t_1)}>0$$

$t<t^*=\dfrac{1}{w(t_1)+t_1-t}$ $\qquad (\alpha,\beta)=(-\infty,t^*)=\left(-\infty,\dfrac{1}{w(t_1)+t_1-t}\right)$

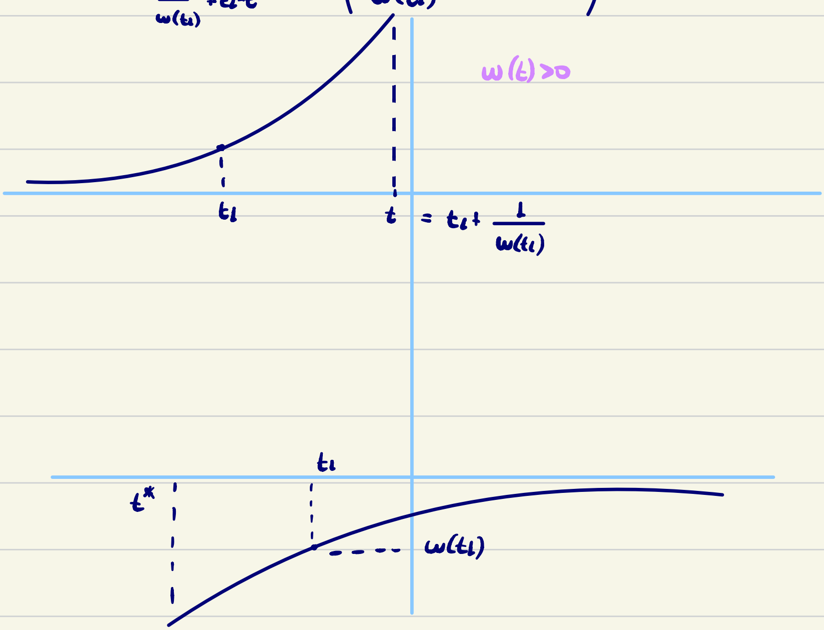
(iii) $\omega(t_1)<0$:

Αντίστοιχα θα υπάρχει μέγιστο διάστημα $t_n \in (c,d)$ ώστε $\omega(t)<0$ $\forall\ t\in(c,d)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega(t)} = \frac{1}{\omega(t_1)} + t_1 - t$$ άρα στο $$t^* = \frac{1}{\omega(t_1)} + t_1 \Leftrightarrow t^* - t_1 = \frac{1}{\omega(t_1)} < 0$$

$$\omega(t) = \frac{1}{\frac{1}{\omega(t_1)} + t_1 - t} \qquad t^* < t \qquad (c,d) = \left(\frac{1}{\omega(t_1)} + t_1,\ +\infty\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} t, & t\in\mathbb{R} \\ t + \dfrac{1}{\frac{1}{\omega(t_1)} + t_1 - t} & \omega(t)>0 \ \left(-\infty, \dfrac{1}{\omega(t_1) + t_1 - t}\right) \\ t + \dfrac{1}{\frac{1}{\omega(t_1)} + t_1 - t}, & t\in\left(\dfrac{1}{\omega(t_1)} + t_1,\ +\infty\right) \end{cases}$$



ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ:

2ης τάξης Δ.Ε: $F(\overset{t}{t}, \overset{x}{y(t)}, \overset{y}{y'(t)}, \overset{z}{y''(t)}) = 0$ όπου $\frac{dF}{dz} \neq 0$

Γραμμική 2ης τάξης: Η εξίσωση γίνεται με γραμμικό τρόπο:

$$g(t) \cdot x''(t) + h(t) \cdot x'(t) + m(t) \cdot x(t) + \ell(t) = 0$$

$$x''(t) + a(t)\, x'(t) + b(t) \cdot x(t) = y(t)$$

ομογενείς αν $y(t) \equiv 0 \quad t \in \mathbb{R}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ:

$Ax = b$

$A\vec{x_0} = \vec{b}$

Εξίσωση: Βρίσκουμε μια ειδική λύση $\vec{x_0}$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

η αντικατάσταση $\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{y}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

δίνει: $A(\vec{x_0} + \vec{y}) = b$ $\quad \vec{b} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A\vec{x_0} + A\vec{y} = \vec{b} \Leftrightarrow \boxed{A\vec{y} = 0} \ (*)$$

$\ker A = \{\vec{0}\}$

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{x_0}$

Άρα

Διανυσματικός χώρος: $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$V = \{x \in D^2(\mathbb{R})\}$$