Δ.Ε Bernulli & Ricatti:

12/03/2024

$y'(x) = a(x)y + \beta(y)y^{a}$

$y' = a(x) + \beta(x)y + \gamma(x)y^{2}$

Ricatti:

Βρίσκουμε μια ειδική λύση $y_0(x)$ (συνάρτηση που λύνει τη Δ.Ε ΜΟΝΟ).

Μετά κάνουμε την αντικατάσταση $y(x) = y_0(x) + z(x)$

Η z ικανοποιεί την εξίσωση Bernulli.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ:

Τάξη Δ.Ε είναι ο βαθμός παραγώγισης συνάρτησης.

- Πρώτης τάξης Δ.Ε: $f(t, \overset{x}{y(t)}, \overset{y}{y'(t)}) = 0$

$$\frac{df}{dy}(t, x, y) \neq 0$$

- Δεύτερης τάξης Δ.Ε: $f(t, \overset{x}{y(t)}, \overset{y}{y'(t)}, \overset{z}{y''(t)}) = 0$

$$\frac{df}{dz}(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε 1ης ΤΑΞΗΣ:

$a(t) \cdot y'(t) + \beta(t) \cdot y(t) = \gamma(t)$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ:

$$a(t)\cdot y''(t)+\beta(t)\cdot y'(t)+\gamma(t)\cdot y(t)=\delta(t)$$

$$y''(t)+A(t)\cdot y'(t)+B(t)\cdot y(t)=\Gamma(t)$$

Αν $y_0(t)$ είναι μια λύση, τότε η αντικατάσταση: $y(t)=y_0(t)+z(t)$

Η Δ.Ε γίνεται: $(y_0(t)+z(t))''+A(t)(y_0(t)+z(t))'+B(t)(y_0(t)+z(t))=\Gamma(t)$

$$z''(t)+A(t)\cdot z'(t)+B(t)z(t)=\Gamma(t)\cdot y_0''(t)-A(t)y_0'(t)-B(t)y_0(t)=0$$

Τι γίνεται με το πλήθος των λύσεων της:

$z''(t)+A(t)z'(t)+B(t)z(t)=0$

Για παράδειγμα τι γίνεται στις λύσεις αν $A,B\in C(\mathbb{R})$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Το σύνολο των λύσεων Δ.Ε $z''(t)+A(t)z'(t)+B(t)z(t)=0$ είναι ένας δ.υ $+,\cdot$ Ειδικότερα ο δ.υ είναι πεπερασμένης διάστασης είναι ίση με την τάξη της Δ.Ε.

Στόχος:

Να βρούμε μια βάση λύσεων, δηλ. 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Πότε y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις;

Είναι γραμμικά εξαρτημένες, όταν $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $|\lambda_1|+|\lambda_2| \neq 0$ τέτοιες ώστε $\lambda_1 y_1(t)+\lambda_2 y_2(t)=0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν y_1, y_2 $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

Έστω $z'(t)+A(t)z(t)=0$.

Είχαμε μεθοδολογία εύρεσης λύσεων για παράδειγμα με τον πολλαπλασιαστή Euler: $\varphi(t)z'(t)+\boxed{A(t)\varphi(t)}\,z(t)=0$

$$(\varphi(t)z(t))' = \varphi(t)\cdot z'(t)+\varphi'(t)z(t)$$

οπότε $\varphi'(t)=A(t)\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t)=e^{\int_0 A(s)\,ds}$

ΔΕΝ έχουμε γενική μεθοδολογία εύρεσης λύσεων της

$z''+A(t)z'(t)+B(t)z(t)=0$

Μπορούμε όμως να λύσουμε τη $z''(t)+A(t)z'(t)=0$ αν θέσουμε

$z'(t)=w(t) \Rightarrow w'(t)+A(t)\cdot w(t)=0$

Ειδική περίπτωση: Αν $A(t) \equiv a$, $B(t) \equiv b$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε γενική μεθοδολογία εύρεσης λύσεων.

$z'' + a z'(t) + b z(t) = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

$y''(t) = 0 \Leftrightarrow (y'(t))' = 0$

$\Rightarrow \exists\, c_1 \in \mathbb{R} \quad y'(t) \equiv c_1$

$\Leftrightarrow (y(t) - c_1 t)' = 0$

$\exists\, c_2 \in \mathbb{R} \quad y(t) - c_1 t = c_2 \Leftrightarrow y(t) = c_1 \cdot t + c_2$

$B = \{1, t\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

$y'''(t) = 0 \Rightarrow y(t) = c_3 + c_2 t + c_1 \frac{t^2}{2}$

$B = \{1, t, t^2/2\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε $y''(t) - y(t) = 0$

Λύση:

Μπορούμε να βρούμε λύσεις: στη μορφή $e^{\lambda t}$ όπου $\lambda \in \mathbb{C}$

$y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$z' + a z(t) = 0 \Rightarrow z(t) = e^{-at}$

$\frac{z'}{z} + a = 0$

$(\ln z(t) + at)' = 0$

$\ln z(t) + at = 0$

$\ln z(t) = -at$

$z(t) = e^{-at}$

Τότε έχουμε $\lambda^2 e^{\lambda t} - e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

Χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε $\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

Είτε $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow e^{t}$

Είτε $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \Rightarrow e^{-t}$

και οι e^{t}, e^{-t} είναι λύσεις της Δ.Ε είναι και γρ. ανεξάρτητες, διότι αν ήταν γρ. εξαρτημένες $\Rightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2$ με $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$
$\lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις e^{t}, e^{-t} είναι βάση του υπόχωρου των λύσεων της Δ.Ε και η γενική λύση είναι: $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$
για κατάλληλες σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4:

Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$

Λύση:

Βρίσκουμε λύσεις στη μορφή $e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+5\lambda e^{\lambda t}+6e^{\lambda t}=0 \iff \lambda^2+5\lambda+6=0$$
$$\iff (\lambda+2)(\lambda+3)=0$$
$$\iff \lambda=-2 \Rightarrow e^{-2t}$$
$$\iff \lambda=-3 \Rightarrow e^{-3t}$$

Γενική λύση $\exists$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y(t)=e^{-2t}+e^{-3t}, \quad t\in\mathbb{R}$

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$$y''(t)+ay'(t)+\beta y(t)=0$$

$y(t)=e^{\lambda t} \Rightarrow$ χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2+a\lambda+\beta=0$

$$\Delta=\beta^2-4\beta>0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5:

$$y''(t)+y(t)=0$$

Η εύρεση στη μορφή $e^{\lambda t}$, μας οδηγεί στην εύρεση λύσεων αλγεβρικής εξίσωσης $\lambda^2-i^2=0 \iff \begin{cases} \lambda=i \\ \lambda=-i \end{cases}$

Τύπος του Euler: $\Rightarrow e^{it}=\cos t+i\sin t$

$$e^{-it}=\cos(-t)+i\sin(-t)=\cos t-i\sin t$$

Γραμμικότητα λύσεων: $e^{it}+e^{-it}=2\cos t$

$\Rightarrow \cos t, \sin t$ (Πραγματικές συναρτήσεις 2 λύσεις γρ. ανεξάρτητες).

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 : y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{C} : y(t)=\tilde{c}_1 e^{it}+c_2 e^{-it}$

(βρίσκω από 2 μιγαδικές λύσεις 2 πραγματικές λύσεις).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6:

Να λυθεί: $y''-4y'+5y(t)=0$

$\Rightarrow$ Χαρακτηριστική εξίσωση: $(e^{\lambda t})$

$$\lambda^2-4\lambda+5=0 \iff (\lambda-2)^2+1=0$$

$$\iff (\lambda-2)^2-i^2=0$$

$$\iff \lambda=2\pm i \quad \begin{cases} \lambda_1=2+i \\ \lambda_2=2-i \end{cases}$$

$e^{(2+i)t}=e^{2t}\cdot e^{it}=e^{2t}($

$e^{2t}\cos t$, $e^{2t}\sin t \Rightarrow$ Γενική λύση: $\exists$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}\sin t, \ t \in \mathbb{R}$$

Πότε η αλγεβρική εξίσωση $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$ διπλή

$\Rightarrow e^{-t}$ λύση.

Στόχος: Να βρούμε μια δεύτερη (γρ. ανεξάρτητη) λύση και κάνουμε την αντικατάσταση: $y(t) = e^{-t} \cdot z(t)$

$$z'' + A(t)z'(t) + B(t)z(t) = 0$$

Η επιλογή $z(t) = 1$ θα πρέπει να λύνει τη Δ.Ε:

$z'(t) = 0$, $z''(t) = 0$

θα έπρεπε: $0 + A(t) \cdot 0 + B(t) = 0 \Leftrightarrow B(t) = 0$

Άρα $y(t) = e^{-t} \cdot z(t) \Rightarrow y'(t) = e^{-t}z'(t) - e^{-t}z(t)$

$$y''(t) = e^{-t}z''(t) - e^{-t}z'(t) - e^{-t}z'(t) + e^{-t} \cdot z(t)$$

$$= e^{-t}z''(t) - 2e^{-t}z'(t) + e^{-t}z(t)$$

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=0 \iff e^{-t}z''(t)-2e^{-t}z'(t)+e^{-t}z(t)+2(e^{-t}z(t)-e^{-t}z(t))+e^{-t}z(t)=0$$

$$\iff e^{-t}z''(t)+(-2e^{-t}+2e^{-t})z'(t)+(e^{-t}-2e^{-t}+e^{-t})z(t)=0$$

$$\iff e^{-t}z''(t)=0$$

$$\iff z''(t)=0$$

$$\Rightarrow z(t)\ c_1+c_2$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{-t}(c_1+c_2t)$$

$$=c_1\cdot e^{-t}+c_2te^{-t}$$

$a_i\in\mathbb{R}$ $\quad y^{(n)}+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

$y(t)=e^{2t}\Rightarrow \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

$$\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k)^{m_k}=0$$

$\lambda=\lambda_k\longrightarrow e^{\lambda_k t}$

$te^{\lambda_k t}$

$\vdots$

$t^{m-1}e^{\lambda_k t}$