## Δ. Euler:

19/03/2024

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

(Δ.Ε $3^{ης}$ τάξης: $x^3y'''(x) + ax^2y''(x) + bxy'(x) + \gamma y(x) = 0$)

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν ψάχνουμε λύση στη μορφή $y(x) = x^\lambda$

- $y(x) = x^\lambda$
- $y'(x) = \lambda \cdot x^{\lambda-1} \Rightarrow xy'(x) = \lambda x^\lambda$
- $y''(x) = \lambda(\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2} \Rightarrow x^2 \cdot y''(x) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot x^\lambda$

Η Δ.Ε $\lambda(\lambda-1)x^\lambda + a\lambda x^\lambda + bx^\lambda = 0$

ΑΡΚΕΙ $\lambda^2 - \lambda + a\lambda + b = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η γενική λύση $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$, $x > 0$.

**Λύση:**

Ψάχνουμε για λύση στη μορφή $y(x) = x^\lambda$

$\Rightarrow y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ & $y''(x) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2}$

και η Δ.Ε $\lambda \cdot (\lambda-1) \cdot x^\lambda + \lambda \cdot x^\lambda - x^\lambda = 0$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow x,\ x^{-\lambda}$$

και η γενική λύση $y(x) = c_1 x + c_2^{-x}$, $x > 0$

## 2η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

$y(x) = f(t)$

$x = g(t)$

$$\Rightarrow y'(x) = \dot{f}(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$y''(x) = \dot{f}(t) \frac{d^2t}{dx^2} + \ddot{f}(t) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2$$

$$x^2 y''(x) + ax\, y'(x) + b\, y(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \left( \ddot{f}(t) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 + \dot{f}(t) \frac{d^2t}{dx^2} \right) + ax \cdot \dot{f}(t) \cdot \frac{dt}{dx} + b \cdot f(t) = 0$$

$$\underbrace{x^2 \left( \frac{dt}{dx} \right)^2}_{1} \ddot{f}(t) + \left( \underbrace{x^2 \frac{d^2t}{dx^2}}_{-1} + a\underbrace{x \frac{dt}{dx}}_{1} \right) \cdot \dot{f}(t) + b f(t) = 0$$

Μπορώ να φτάσω σε Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές;

Η επιλογή: $x \frac{dt}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{t = \ln x}$

$$t = \ln x \Leftrightarrow \boxed{x = e^t}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\ddot{f}(t) + (a-1) \cdot \dot{f}(t) + b f(t) = 0$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Να βρεθεί η γενική λύση: $t^2 y''(t) + 3t \cdot y'(t) + y(t) = 0$

**Λύση:**

Ψάχνουμε για λύσεις: $y(t) = t^\lambda$, $y'(t) = \lambda t^{\lambda-1}$, $y''(t) = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$

$$\lambda(\lambda-1)t^\lambda + 3\lambda t^\lambda + t^\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

$y(t) = t^{-1}$ είναι μια λύση του προβλήματος.

Αν θέσουμε: $y(t) = \varphi(x)$, $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$

$$y'(t) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$= \dot{\varphi}(x) \cdot \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow y''(t) = \dot{\varphi}(x)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}(x)) \cdot \frac{1}{t}$$

$$= -\frac{1}{t^2} \cdot \dot{\varphi}(x) + \ddot{\varphi}(x)\frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \frac{-\dot{\varphi}(x)}{t^2} + \frac{\ddot{\varphi}(x)}{t^2}$$

$$\Rightarrow t^2 \cdot y''(t) = -\dot{\varphi}(x) + \ddot{\varphi}(x)$$

$$-\dot{\varphi}(x) + \ddot{\varphi}(x) + 3(\dot{\varphi}(x)) + \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\ddot{\varphi}(x) + 2\dot{\varphi}(x) + \varphi(x) = 0}_{e^{\lambda x}}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0$$

$$e^{-x}, \quad x e^{-x}$$

$$t^{-1} = (e^x)^{-1} = x(e^x)^{-1} = t^{-1} \cdot \ln t$$

Άρα η άλλη λύση είναι: $\dfrac{\ln t}{t}$, $t > 0$

Και η γενική λύση είναι: $y(t) = \dfrac{c_1}{t} + c_2 \dfrac{\ln t}{t}$, $t > 0$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Να βρεθεί η γενική λύση: $t^2y''(t)+3ty'(t)+2y(t)=0$

Λύση:

$y(t)=\lambda^t \Rightarrow \lambda(\lambda-1)t^\lambda+3\lambda t^\lambda+2t^\lambda=0$

$t^2(\lambda^2+2\lambda+2)=0$

$\lambda^2+2\lambda+2=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2+1=0$

$-i^2=0$

$(\lambda+1+i)(\lambda+1-i)=0$

$\lambda=-1-i$

$\lambda=1+i$

$t^{-1-i}=t^{-1}\cdot t^{-i}$

$t^i=e^{\ln t i}=e^{i\ln t}$

$=\cos(\ln t)+i\sin(\ln t)$ $\qquad e^{ix}=\cos x$

$t^{-1+i}=t^{-1}(\cos(\ln t)+i\sin(\ln t))$

$t^{-1+i}=t^{-1}(\cos(-\ln t)+i\sin(-\ln t))$

$=t^{-1}(\cos(\ln t)-i\sin(\ln t))$

Επομένως η γενική λύση είναι: $y(t)=c_1\dfrac{\cos(\ln t)}{t}+c_2\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$, $t>0$

$a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ $\quad t^{a+bi}$

## ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΣΕ Δ.Ε ΜΕ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η γενική λύση: $x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)\cdot y(x) = 0$

(Δεν είναι Euler)

### ΕΡΩΤΗΣΗ:

Μπορούμε να βρούμε μία "πολυωνυμική" λύση;

$y(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$

$\Rightarrow x(x+1)\cdot y'(x) = mx^{m+1} + \dots$

$x^2y''(x) = m(m-1)x^m + \dots$

Λύση:

Ψάχνουμε για λύσεις: $y(x) = x + \lambda \Rightarrow y'(x) = 1 \;,\; y''(x) = 0$

$-x(x+2) + (x+2)(x+\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\cancel{x^2} - \cancel{2x} + \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \lambda x + 2\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda x + 2\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$

Επομένως γνωρίζουμε ότι $y(x) = x$ είναι μια λύση της

$x^2y''(x) - x(x+2)\cdot y'(x) + (x+2)\cdot y(x) = 0$

Τώρα θέλω να βρω αυτή μία λύση γρ. ανεξάρτητη

1ος τρόπος:

Κάνουμε την αντικατάσταση $y(x) = xz(x)$

$$\Rightarrow y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

$$y''(x) = z'(x) + z'(x) + xz''(x)$$

$$= 2z'(x) + xz''(x)$$

και η Δ.Ε ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2(2z'(x) + xz''(x)) - x(x+2)(z(x) + xz'(x)) + (x+2)xz(x) = 0$$

$$x^3 z''(x) + 2x^2 z'(x) - x^2(x+2)z'(x) - x\cancel{(x+2)}z(x) + x\cancel{(x+2)}z(x) = 0$$

$$x^3 z''(x) + x^2(2-x-2)z'(x) = 0$$

$$x^3 z''(x) - x^3 z'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(z''(x) - z'(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z''(x) - z(x) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$z'(x) = f(x)$$

$$\lambda = 0 \rightarrow 1$$

$$f'(x) - f(x) = 0$$

$$\lambda = 1 \rightarrow e^x$$

Άρα $z(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^x$

Και η Δ.Ε $y(x) = x(c_1 + c_2 e^x)$

## Wronski:

1ης τάξης: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_1'(x)\cdot y_2(x)$

2ης τάξης: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & y_1''(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & y_2''(x) \\ y_3(x) & y_3'(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$

2ος τρόπος:

Αν $y_1, y_2$ να είναι λύσεις.

$$y'' + g(x)\cdot y' + h(x)\cdot y(x) = 0 \Rightarrow W'(x) = y_1 y_2''(x) - y_1''(x)\cdot y_2(x)$$

$$= y_1\left(-g(x) y_2'(x) - h(x)\cdot y_2(x)\right) - y_2(x)\left(-g(x) y_1'(x) - h(x)\cdot y_1(x)\right)$$

$$= -g(x)\underbrace{\left(y_1\cdot y_2'(x) - y_2 y_1'(x)\right)}_{W(x)}$$

$$e^{\int_0^x g(x)ds}\left(W'(x) + g(x)\cdot W(x)\right) = 0$$

$$\left(e^{\int_0^x g(x)ds}\cdot W(x)\right)' = 0 \Rightarrow W(x) = W(1)\, e^{-\int_1^x g(s)\,ds}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$y''(x) - \frac{x+2}{x} \cdot y'(x) + \frac{x+2}{x^2} \cdot y(x) = 0$$

$$e^{-\int_1^x -\frac{t+2}{t}\,dt} = e^{\int_1^x \frac{t+2}{t}\,dt}$$

$$= e^{x-1+2\ln x}$$

$$= e^{x-1}x^2$$

$$\boxed{w(x) = y_1 \cdot y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = c x^2 \cdot e^{x-1}}$$

Έστω $y_1(x) = x$ , $y_1'(x) = 1$

$$x y_2'(x) - 1 \cdot y_2(x) = c x^2 \cdot e^{x-1} \Rightarrow \boxed{y_2'(x) - \frac{1}{x} y_2(x) = c x e^{x-1}}$$

→ 1ης τάξης γραμμική Δ.Ε

**Παράδειγμα:** 21/03/2023

$$y''(x) - \frac{x+2}{x}\cdot y'(x) + \frac{x+2}{x^2}\cdot y(x) = 0$$

Μια λύση είναι η $y_1(x) = x$.

1ος τρόπος: Κάνουμε την αντικατάσταση $y(x) = x\,z(x)$.

Μια προφανής λύση είναι η $z(x) = 1$

Είναι $y(x) = xz(x) \Leftrightarrow y'(x) = z(x) + xz'(x)$

$$\Rightarrow y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$$

Άρα η Δ.Ε γράφεται: $x^2(xz''(x) + 2z'(x)) - x(x+2)(z(x) + xz'(x)) + (x+2)x\,z(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3z''(x) + 2x^2z'(x) - x^2(x+2)z'(x) - x\cancel{(x+2)}z(x) + (x\cancel{+2})z(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^3z''(x) + x^2(2-x-2)z'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^3z''(x) - x^3z'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^3(z''(x) - z'(x)) = 0$$

$$\Rightarrow z''(x) - z'(x) = 0, \quad z(x) = e^{\lambda x}$$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1$$

Άρα $z(x) = c_1\cdot e^0 + c_2\cdot e^x \Rightarrow \boxed{y(x) = xc_1 + xc_2e^x}$

Έστω $y(x)$ δεύτερη γρ. ανεξάρτητη λύση, $W(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'(x) - y(x)$

$$w'(x) = (xy'(x) - y(x))' \Rightarrow w'(x) = xy''(x)$$

$$\Rightarrow w'(x) = x\left(\frac{x+2}{x} y'(x) - \frac{x+2}{x^2} y(x)\right) = (x+2)y'(x) - \frac{x+2}{x} y(x)$$

$$= \frac{x+2}{x} \underbrace{(xy'(x) - y(x))}_{w(x)}$$

$$= \frac{x+2}{2} \cdot w(x)$$

Λύγουμε $w'(x) = \frac{x+2}{x} w(x) \Rightarrow w'(x) - \frac{x+2}{x} w(x) = 0$

$$\Rightarrow \varphi\left(w'(x) - \frac{x+2}{x} (w(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\varphi(x) \cdot w(x))' = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) w(x) + \varphi(x) w(x) = 0$$

Θέλουμε $\varphi'(x) = -\frac{x+2}{x}$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -1 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow (\ln \varphi(x))' = (-x - 2\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow \ln \varphi(x) = -x - 2\ln x \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = e^{-x} \cdot x^{-2}}$$

$$\left(\frac{e^{-x}}{x^2} w(x)\right)' = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{x^2} w(x) = e^{-1} w(1) \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{w(x) = e^{x-1} x^2 w(1)}$$

$$w(x) = c x^2 \cdot e^{x-1}$$

$$x y'(x) - y(x) = c e^x \cdot x^2$$

$$\frac{y'(x)}{x} - \frac{1}{x^2} y(x) = c e^x \Leftrightarrow c e^x = \frac{y'(x) - x y(x)}{x^2}$$

$$\left(\frac{y(x)}{x}\right)' = (c e^x)'$$

$$\frac{y(x)}{x} - c e^x = c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c x e^x + c_2 x}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:**

Να βρεθεί η γενική λύση: $y''(x)+xy'(x)-y(x)=0$

**Λύση:**

Θα βρούμε αρχικά μία ειδική λύση.

Παρατηρούμε ότι η $y(x)=x$ είναι μια λύση της Δ.Ε.

Για τη 2η κάνουμε την αντικατάσταση.

Θέτουμε $y(x)=xz(x) \Rightarrow y'(x)=xz'(x)+z(x)$

$$y''(x)=xz''(x)+z'(x)+z'(x)$$

$$=xz''(x)+2z'(x)$$

και η Δ.Ε γράφεται: $xz''(x)+2z'(x)+x(xz'(x)+z(x))-xz(x)=0$

$$xz''(x)+2z'(x)+x^2z'(x)+x\cancel{z(x)}-x\cancel{z(x)}=0$$

$$xz''(x)+(2+x^2)z'(x)=0$$

Θέτουμε $z'(x)=w(x)$ και η Δ.Ε: $\varphi(xw'(x)+(2+x^2)\cdot w(x))=0$

$$x\varphi(x)\cdot w'(x)+(2+x^2)\cdot\varphi(x)\cdot w(x)=0$$

$$(x\varphi(x)\cdot w(x))'=0$$

$$x\varphi(x)\cdot w'(x)+(x\varphi(x))'\cdot w(x)=0$$

$$(x\cdot\varphi(x))'=(2+x^2)\cdot\varphi(x)$$

$$x\cdot\varphi'(x)+\varphi(x)=(2+x^2)\cdot\varphi(x)$$

$$x\varphi'(x)=(1+x^2)\varphi(x)$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{1+x^2}{x}=\frac{1}{x}+x$$

$$\ldots \quad (\ln \varphi(x))' = \left(\ln x + \frac{x^2}{2}\right)'$$

Επιλέγω $\ln \varphi(x) = \ln x + \dfrac{x^2}{2}$

$$\varphi(x) = e^{\ln x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi(x) = \underbrace{e^{\ln x}}_{x} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$w(x) = c \cdot \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 e^{\frac{x^2}{2}} w(x)\right)' = 0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : x^2 e^{\frac{x^2}{2}} \cdot w(x) = c$$

$$z'(x) = c \cdot \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}$$

$$z'(x) = c \cdot \left( \int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\, ds \right)' \Leftrightarrow \left( z(x) - c \int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\, ds \right)' = 0$$

$$\exists\, c_1 \in \mathbb{R} : z(x) - c \int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\, ds = c_1$$

$$z(x) = c_1 + c \cdot \int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\, ds$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 x + c \cdot x \cdot \int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\, ds$$

$$\int_1^x \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s^2}\, ds = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}}\, dt$$

$$s = t^{1/2} \Rightarrow s'(t) = \frac{1}{2} t^{1/2 - 1} = \frac{t^{-1/2}}{2}$$