ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ Δ.Ε:

26/03/2024

(Με σταθερούς συντελεστές - Εξ Euler)

↳ Γραμμική Δ.Ε ομογενής και γνωρίζουμε μια λύση τότε μπορούμε να υποβιβάσουμε τη Δ.Ε.

$y(x) = y_1(x) z(x)$

$\Rightarrow$ Γραμμική Δ.Ε προς z της μορφής: $z^{(v)}(x) + \ldots + a_1 z'(x) = 0$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = g(x)$$

Τότε αν γνωρίζουμε μια γενική της μη ομογενούς τότε:

$y(x) = y_{ειδ} + y_{γενική} \iff y(x) = y_{ειδ} + γενική$ λύση ομογενούς.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ: (Μέθοδος Lagrange)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί η Δ.Ε $y''(t) + y(t) = g(t)$ όπου $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δοθείσα συνεχής συνάρτηση.

Λύση:

Αρχικά λύνουμε την αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε $y''(t) + y(t) = 0$.

Η εύρεση λύσεων στη μορφή $e^{\lambda t}$ οδηγεί στη χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ οι λύσεις της Δ.Ε είναι: $e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\Rightarrow$ Μια βάση λύσεων: $\cos t, \sin t$ της ομογενής Δ.Ε

$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$

Θα βρούμε μια ειδική λύση στη μορφή: $y_{εισ}(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$

$$y_{εισ}'(t) = \underbrace{c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t}_{\text{μηδενίζω}} - c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t$$

Οπότε $y'_{εισ}(t) = -c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t$

$$y''_{εισ}(t) = -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t - c_1(t)\cos t - c_2(t)\sin t$$

και η Δ.Ε δίνει: $\underbrace{-c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t - c_1(t)\cos t - c_2(t)\sin t + c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t}_{= g(t)}$

Άρα παίρνω το σύστημα: $\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0 \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = 0 \end{cases}$

Λύνω το σύστημα: $\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = A^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(t) = \frac{1}{\det(A(t))} \left((-1)^{i+j} A_{ij}(t) \right)^t$$

ή με κανονική επίλυση: $\begin{cases} \cos t\,(c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t) = 0 \\ \sin t\,(-c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t) = g(t)\sin t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = -g(t)\sin t \\ \cos t\, c_1'(t) + \sin t\, c_2'(t) = 0 \end{cases}$$

Άρα $\begin{cases} c_1'(t) = -g(t)\sin t \\ c_2'(t) = g(t)\sin t \end{cases}$

Με ολοκλήρωση παίρνω: $c_1(t) = \left(-\int_0^t g(\xi)\sin\xi \, d\xi\right) + c_1$

$$c_2(t) = \left(\int_0^t g(\xi)\cos\xi \, d\xi\right) + c_2$$

Άρα $y_{ειδ} = \left(c_1 - \int_0^t g(\xi)\sin\xi\, d\xi\right)\cos t + \left(c_2 + \int_0^t g(\xi)\cos\xi\, d\xi\right)\sin t$

$$= c_1\cos t - \cos t\int_0^t g(\xi)\sin\xi\, d\xi + c_2\sin t + \sin t\int_0^t g(\xi)\cos\xi\, d\xi$$

$3^{ης}$ ΤΑΞΗΣ Δ.Ε:

$$y'''(t) + a_1(t)y''(t) + a_2(t)y'(t) + a_3(t)y(t) = c(t)$$

Έστω ότι η γενική λύση της ομογενούς:

$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t)$ με (y_1, y_2, y_3) είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς.

Άρα όπως ξέρω η ειδική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_{ειδ}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t)$$

$$y'_{ειδ}(t) = \underbrace{c_1'(t)y_1(t) + c_2'y_2(t) + c_3'y_3(t)}_{\text{το θεωρώ } 0} + c_1(t)y_1'(t) + c_2y_2'(t) + c_3y_3'(t)$$

$$y''_{ειδ}(t) = \underbrace{c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + c_3'(t)y_3'(t)}_{\text{το θεωρώ } 0} + c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t) + c_3(t)y_3''(t)$$

$y'''_{\varepsilon\iota\delta}(t) = c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' + c_1(t) y_1'''(t) + c_2(t) y_2'''(t) + c_3(t) y_3'''(t)$

Άρα το σύστημα που θα πάρω θα είναι με 3 εξισώσεις.

Άρα $3^{ης}$ τάξης Δ.Ε γίνεται ως εξής: $y'''(t) + a_1 y''(t) + a_2 y'(t) + a_3 y(t) = g(t)$

$c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' + c_1 y_1''' + c_2 y_2''' + c_3 y_3''' + a_1(t)(c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'') +$
$a_2(t)(c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3') + a_3(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3) = g(t)$

$\rightarrow c_1(y_1''' + a_1(t) y_1'' + a_2(t) y_1' + a_3(t) y_1) + c_2(y_2''' + a_1(t) y_2'' + a_2(t) y_2' + a_3(t) y_2) + c_3(\ldots)$

Όλα που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις είναι 0 γιατί είναι λύσεις της ομογενούς για κάθε τιμή.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

(όταν η Δ.Ε είναι με σταθερούς συντελεστές)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί μια λύση της $y''(t) + y(t) = e^t$

Λύση:

Ψάχνουμε λύσεις στη μορφή $ke^t = y_{\varepsilon\iota\delta}(t)$, $y'_{\varepsilon\iota\delta}(t) = ke^t$, $y''_{\varepsilon\iota\delta}(t) = ke^t$

$\Rightarrow ke^t + ke^t = e^t \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί μια λύση της $y''(t) + y(t) = e^{\lambda t}$

Λύση:

Να βρω λύσεις $ke^{\lambda t} = y_{\varepsilon\iota\delta}(t)$, $y'_{\varepsilon\iota\delta}(t) = k\lambda e^{\lambda t}$, $y''_{\varepsilon\iota\delta}(t) = k\lambda^2 e^{\lambda t}$

$k\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = e^{\lambda t}$

$\kappa(e^{\lambda}+1)=1$

Αν $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\lambda^2+1}$

$\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, $\lambda = \pm i$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί μια λύση της $y''(t)+y(t)=\cos t$ $(\mathrm{Re}\, e^{it})$

Λύση:

Θα βρούμε αρχικά λύση για το $y''(t)+y(t)=e^{it}$

Αν ψάχναμε για λύση $y=ke^{it}$ προκύπτει: $y'=ike^{it}$

$$y''=ki^2e^{it}=-ke^{it}$$

$ke^{it}+ke^{it}=e^{it}$ ΑΔΥΝΑΤΟ

Ψάχνουμε για λύση στη μορφή: $kte^{it}=y$

$$y'=ke^{it}+kit\cdot e^{it}$$

$$y''=2kie^{it}-kte^{it}$$

$2ki=1$

και η Δ.Ε γίνεται: $2kie^{it}-k\cancel{te^{it}}+k\cancel{te^{it}}=e^{it}$

$k=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$

$$-\frac{i}{2}te^{it}=-\frac{i}{2}t(\cos t+i\sin t)=-\frac{1}{2}t\cos t\, i-\frac{i^2}{2}\sin t$$

$$=\frac{1}{2}t\sin t-\frac{1}{2}t\cos t\, i$$

$\frac{1}{2}t\sin t$ ειδική λύση

Για τη Δ.Ε: $y''+y=\sin t=\mathrm{Im}(e^{it})$

$$y_{ειδ}(t)=\frac{-t\cos t}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί μια λύση $y''(t)+y(t)=t^2e^t$

Λύση:

Αρχικά βρίσκουμε λύση στη μορφή $y(t)=e^t z(t)$

$y'(t)=e^tz+e^tz'$

$y''(t)=e^tz''+2e^tz'+e^tz$

$e^tz''+2e^tz'+e^tz+e^tz=e^t\cdot t^2$

⊛ $z''+2z'+2z=t^2$ (Πολυωνυμική Συνάρτηση)

Ψάχνουμε μια λύση στη μορφή: $z(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$

$z'(t)=2\alpha t+\beta$

$z''(t)=2\alpha$

$2\alpha+2(2\alpha t+\beta)+2(\alpha t^2+\beta t+\gamma)=t^2$

$2\alpha t^2+(2\beta+4\alpha)t+2\alpha+2\beta+2\gamma=t^2+0t+0$

$$\begin{bmatrix} 2\alpha=1 \\ 2\beta+4\alpha=0 \\ 2\alpha+2\beta+2\gamma=0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \alpha=1/2 \\ \beta=-1 \\ \gamma=-1/2+1=1/2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^t}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί μια λύση $y''(t)+y(t)=t^2\sin t$ / $y''(t)+y(t)=t^2e^{it}$

Λύση:

Αρχικά βρίσκουμε λύση στη μορφή: $y(t)=kte^{it}(t^2+at+\beta)$

$$y(t)=e^{it}(kt^3+\mu t^2+\nu t)$$

$$y'(t)=ie^{it}(kt^3+\mu t^2+\nu t)+e^{it}(3kt^2+2\mu t+\nu)$$

$$y''(t)=i^2e^{it}(kt^3+\mu t^2+\nu t)+2ie^{it}(3kt^2+2\mu t+\nu)+e^{it}(6kt+2\mu)$$

$$=-\cancel{e^{it}}(kt^3+\mu t^2+\nu t)+2i\cancel{e^{it}}(3kt^2+2\mu t+\nu)+\cancel{e^{it}}(6kt+2\mu)+\cancel{e^{it}}(kt^3+\mu t^2+\nu t)$$

$$=t^2e^{it}$$

$$=-kt^3-\mu t^2-\nu t+6ikt^2+4i\mu t+2i\nu+2\mu+kt^3+\mu t^2+\nu t=t^2$$

$$\Leftrightarrow 6kit^2+(4\mu i+6k)t+2\nu i+2\mu=t^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 6ki=1 \\ 4\mu+6k=0 \\ 2\nu i+2\mu=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} k=-1/6\ i \\ \mu=-3/2\,(-1/6\ i)=1/4\ i \\ \nu i=-1/4 \Leftrightarrow \nu=1/4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{e^{it}\left(-1/6\ it^3+1/4\ it^2-1/4\ t\right)}$$

Λήμμα Gronwall:

Έστω y παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, συνεχής στο 0 και ικανοποιεί $y'(t) \leq g(t)y(t)$, $t>0$. Τότε $y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t g(s)\,ds}$ $t \geq 0$

Απόδειξη:

$$e^{-\int_0^t g(s)\,ds}\left(y'(t) - g(t)y(t)\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(e^{-\int_0^t g(s)\,ds}\right)' \leq 0 \quad t>0$$

$$\Rightarrow e^{-\int_0^t g(s)\,ds}\, y(t) \leq y(0) \Leftrightarrow \boxed{y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t g(s)\,ds}} \quad t \geq 0$$

ΛΗΜΜΑ Gronwall: 28/03/2024

Έστω $y \in D(0,+\infty) \cap C[0,+\infty)$ $y'(t) \leq g(t)y(t)$ $t>0$ με $g \in C[0,+\infty)$

$\Rightarrow y(t) \leq y(0) e^{\int_0^t g(s)ds}$ $t \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Μοναδικότητα λύσεων)

Το ΠΑΤ $y''(t)+a(t)y'(t)+b(t)y(t)=g(t)$, $t>0$ με $y(0)=c_1$, $y'(0)=c_2$, όπου $a, b, g \in C[0,+\infty)$ έχει το πολύ μια λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

__Απαγωγή σε άτοπο:__ Έστω ότι το πρόβλημα έχει 2 διακεκριμένες (διαφορετικές) λύσεις.

Θέτουμε $y(t)=y_1(t)-y_2(t)$ $y\neq 0$, $t\geq 0$.

(Δύο συναρτήσεις είναι διαφορετικές στο ίδιο πεδίο ορισμού όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο Π.Ο. στο οποίο διαφοροποιούνται. $\exists\, t_1 \geq 0$ $y_1(t_1)\neq y_2(t_1) \Rightarrow y_1(t_1)-y_1(t_2)\neq 0$).

Η y λύνει τη Δ.Ε:

$$y''(t)+a(t)\cdot y'(t)+by(t) = (y_1(t)-y_2(t))''+a(t)\cdot(y_1(t)-y_2(t))'+b(t)\cdot(y_1(t)-y_2(t))$$

$$=y_1''(t)+a(t)\cdot y_1'(t)+b(t)\cdot y_1(t)-y_2''(t)-a(t)\cdot y_2'(t)-b(t)\cdot y_2(t)$$

$$=g(t)-g(t)$$

$$=0 \quad , t>0$$

Με αρχικές συνθήκες: $y(0)=y_1(0)-y_2(0)=c_1-c_1=0$

$y'(0)=y_1'(0)-y_2'(0)=c_2-c_2=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\sigma(t) = y^2(t) + (y'(t))^2$

$$\sigma'(t) = 2y(t)\,y'(t) + 2y'(t)\cdot y''(t)$$

$$= 2y(t)\,y'(t) + 2y'(t)\left(-a(t)\,y'(t) - b(t)\cdot y(t)\right)$$

$$= 2y(t)\,y'(t) - 2a(t)\,(y'(t))^2 \underbrace{-2b(t)\,y(t)\,y'(t)}$$

$$\leq y^2(t) + (y'(t))^2 - 2a(t)\,(y'(t))^2$$

$$y^2(t) + b^2(t)\,(y'(t))^2$$

$$\leq y^2(t) + (y'(t))^2 + 2|a(t)|\,(y'(t))^2$$

$$y^2(t) + b^2(t)\,(y'(t))^2$$

$$= 2y^2(t) + (1 + 2|a(t)| + b^2(t))\,(y'(t))^2$$

$$\leq 2\sigma(t) + (1 + 2|a(t)| + b^2(t))\,\sigma(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -2b\,y\cdot y' = -\underset{a}{2y}\cdot \underset{b}{by'} \leq a^2 + b^2 \\ \\ \pm 2ab \leq a^2 + b^2 \end{array}}$$

Άρα $\sigma'(t) \leq \underbrace{(3 + 2|a(t)| + b^2(t))}_{g(t)}\,\sigma(t)$

Από το Λήμμα Gronwall έχουμε: $\sigma(t) \leq \sigma(0)\, e^{\int_0^t g(s)ds} = 0$, $t \geq 0$ με $\sigma(0) = y^2(0) + (y'(0))^2 = 0$

$0 \leq y^2(t) + (y'(t))^2 = \sigma(t) \leq 0$, $t \geq 0$

$\Rightarrow y^2(t) + (y'(t))^2 \equiv 0 \Rightarrow y^2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow y(t) \equiv 0 \quad t \geq 0$ ΑΝΤΙΦΑΣΗ

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}\,y'(t) + a_n(t)\,y(t) = g(t)$$

$y(0) = c_1$

$y'(0) = c_2$

$\vdots$

$y^{(n-1)}(0) = c_n$

Έχει το πολύ μια λύση. $\left(\sigma(t) = (y(t))^2 + (y^{(n-1)}(t))^2\right)$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε:

$$\left.\begin{aligned} f'(t) &= g(t) \\ g'(t) &= f(t) \end{aligned}\right\}$$

(Το ίδιο αυτό σύστημα)

(Αφού η g είναι παραγωγίσιμη τότε και η f είναι παραγωγίσιμη).

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ οι f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

$\Rightarrow f''(t) = g'(t) = f(t)$

$f''(t) - f(t) = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η γενική λύση: $x'(t) = y(t) + z(t)$

$$y'(t) = x(t) + z(t)$$

$$z'(t) = x(t) + y(t)$$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= y(t) + z(t) \\ y'(t) &= x(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$x'' + ax + bx = 0$

$x(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (*) \qquad \lambda I_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ δεν πρέπει να αντιστρέφεται.

Δηλαδή $\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftarrow r_1+r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda+2 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3 \to r_3-r_1}{\overset{r_2 \to r_2-r_1}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda+1)^2$$

$\lambda = 2$, απλή ιδιοτιμή (αλγεβρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής)

$\lambda = -1$, διπλή ιδιοτιμή

Στην ιδιοτιμή $\lambda=2$: Έστω $\begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \iff \left[\begin{array}{l} \beta+\gamma = 2a \\ a+\gamma = 2\beta \\ a+\gamma = 2\gamma \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \beta - a = 2(a-\beta) \\ a+\gamma = 2\beta \\ a+\beta = 2\gamma \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3(a-\beta) = 0 \\ a+\gamma = 2a \\ 2a = 2\gamma \end{array}\right] \iff \begin{array}{l} \beta = a \\ \gamma = a \end{array}$$

$$\lambda = 2, \quad \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda=-1$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta+\gamma = -\alpha \\ \alpha+\gamma = -\beta \\ \alpha+\beta = -\gamma \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \gamma=-(\alpha+\beta) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ γρ. ανεξ. στη $\lambda=-1$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Άρα η γενική λύση είναι:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η γενική λύση: $x'(t) = -x(t) + 2y(t)$

$$y'(t) = -2x(t) - y(t)$$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - y(t) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Ψάχνουμε για λύση στη μορφή: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+\lambda)^2 + 2^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - (2i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i) = 0$$

$$\lambda = -1 + 2i$$

$$\lambda = -1 - 2i$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda = -1+2i$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ ιδιοδιάνυσμα

αν $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-1+2i) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a+2b = (1+2i)a \\ -2a-b = (-1+2i)b \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2b = 2ai \\ -2a = 2bi \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = ai \\ a = -bi \end{array} \right. \quad b = ai$$

$$\begin{pmatrix} a \\ ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Η λύση είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t} \cdot e^{i2t}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -\sin 2t + i \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t} i$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Επομένως η γενική λύση είναι: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos 2t \, e^{-t} + c_2 \sin 2t \cdot e^{-t} \\ y(t) &= -c_1 \sin 2t \, e^{-t} + c_2 \cos 2t \, e^{-t} \end{aligned} \quad , t \in \mathbb{R}$$