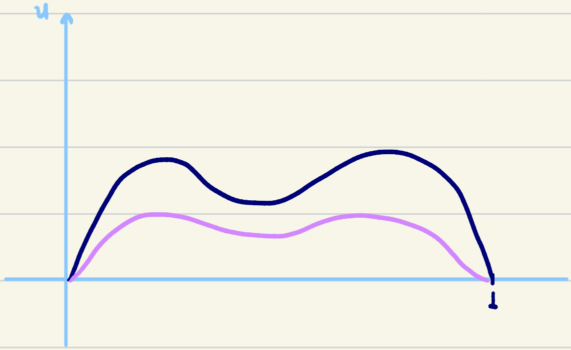
ΜΔΕ: 04/04/2024

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Εξίσωση ταλλόμενης χορδής

Εξίσωση $u_{tt} = c^2 u_{xx}(x,t)$ $0<x<1$

$t>0$



ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ: $u(0,t) = 0 = u(1,t)$

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ: $u(x,0) = f(x)$ $x \in (0,1)$, $t=0$

$u_t(x,0) = g(x)$ $x \in (0,1)$, $t=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(Εξίσωση θερμότητας) $u(x,t)$ χρονική στιγμή t

στη θέση x

$u_t(x,t) = k\, u_{xx}(x,t)$ $0<x<1$ $t>0$

ΣΣ $u(0,t) = g_1(t)$

$u(1,t) = g_2(t)$

Α.Σ $u(x,0) = f(x)$ $0<x<1$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ:

· Dirichlet ΣΣ: $u(0,t) = g_1(t)$

$u(1,t) = g_2(t)$

· Neumann ΣΣ: $u_x(0,t) = h_1(t)$

$u_x(1,t) = h_2(t)$

· 3ου είδους Robin ΣΣ: $a u(0,t) - b u_x(0,t) = Q_1(t)$

$a u(1,t) - b u_x(1,t) = Q_2(t)$

ΚΑΛΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (Hadamard):

↳ Μονοσήμαντο λύσεων

↳ Ύπαρξη λύσης

↳ Συνεχής εξάρτηση των λύσεων από τις παραμέτρους του προβλήματος.

$u \in D^{2,1}((0,1)\times(0,+\infty))$

$C^{2,1}((0,1)\times(0,+\infty))$

2 φορές παρ. ως προς x $u_{xx}, u_t \in C$

Πότε u είναι λύση: $u : [0,1] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \in C^{2,1}\big((\overset{x}{0},1) \times (\overset{t}{0},+\infty)\big) \cap C\big([0,1] \times [0,+\infty)\big)$$

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x)$$

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = g_1(t)$$

ΣΧΕΤΙΚΑ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

↳ $u_x(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$u \in C^{1,0}(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow u(x,y) - u(x_0,y) = (x - x_0)\, u_x(\xi_x, y)$

$\exists\ \xi_x \in$ διαστ. x_0, x

$u(x,y) = u(0,y) = \varphi(y)$ (Η συνάρτηση που είναι ίση με τη συνάρτηση σε κάποιο τυχαίο σημείο - π.χ. εδώ στο 0).

$\varphi \in C(\mathbb{R})$

↳ $u_x(x,y) = 0 \quad , x > 0 , \ y \in \mathbb{R}$

$u(0,y) = Q(y) \quad , y \in \mathbb{R}$

$u \in C^{1,0}((0,+\infty) \times \mathbb{R}) \cap C([0,+\infty] \times \mathbb{R})$

$u(x,y) - u(0,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = Q(b) \quad \forall\ x \in [0,+\infty) \quad y \in \mathbb{R}$

↳ $u_x(x,y,z)=0 \quad u\in C^{1,0,0}(\mathbb{R}^3) \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

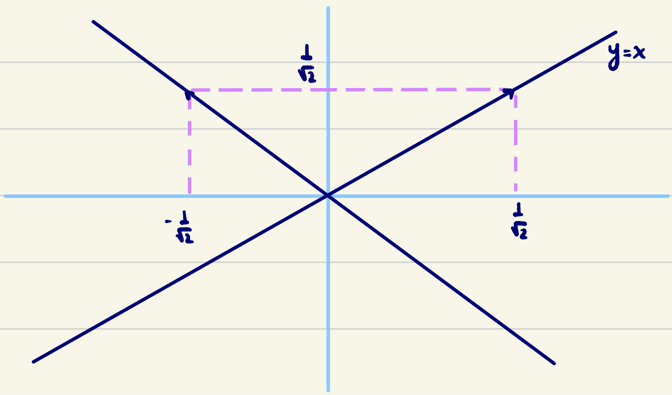
$\Rightarrow u(x,y,z)=\varphi(y,z) \in C(\mathbb{R}^2)$

↳ $u_x(x,y)+u_y(x,y)=0 \quad u\in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$

$= (u_x(x,y), u_y(x,y))\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$

(Είναι η παράγωγος u στην κατεύθυνση του διανύσματος $\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$\frac{d}{dt}\left(u(x,y)+t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\Big|_{t=0} = D_{\hat{u}}\,u(x,y)=0$$



$u_x(x,y)+u_y(x,y)=0 \iff -\cancel{w_\xi(\xi,\eta)}+w_\eta(\xi,\eta)+\cancel{w_\xi(\xi,\eta)}+w_\eta(\xi,\eta)=0$

$u(x,y) = w(\xi,\eta)$

$\xi=y-x \Rightarrow \xi_x=-1$

$\eta=y+x \quad \eta_x=1$

$u_x(x,y)=w_\xi(\xi,\eta)\cdot\frac{d\xi}{dx}+w_\eta(\xi,\eta)\frac{d\eta}{dx}$

$= -w_\xi(\xi,\eta)+w_\eta(\xi,\eta)$

$$u_y = w_\xi \frac{d\xi}{dy} + w_\eta \frac{d\eta}{dy}$$

$$= w_\xi + w_\eta$$

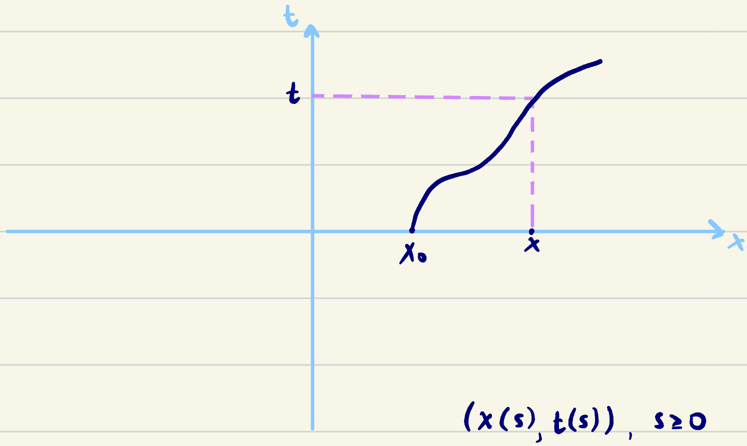
$w_\eta(\xi, \eta) = 0$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ:

$u_x(x, t) + u_t(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$

$u_x(x, 0) = f(x)$

__Χωρίο εξάρτησης:__



$(x(s), t(s)), \quad s \geq 0$

$(x(0), t(0)) = (x_0, 0)$

$(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x, t)$

__ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ:__ $\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x \dot{x}(s) + u_t \dot{t}(s) = 0$

$$\Downarrow$$

$$u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0))$$

$x'(s) = 1, \quad x(0) = x_0 \qquad = u(x_0, 0)$

$t'(s) = 1, \quad t(0) = 0 \qquad = f(x_0)$

ΚΑΜΠΥΛΗ: $x(s) = s + x_0 \Rightarrow x(\bar{s}) = \bar{s} + x_0 = x$

$t(s) = s \qquad t(\bar{s}) = \bar{s} = t$

$\bar{s} = t$

$x_0 = x - t$

$u(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = f(x_0)$

$u(x,t) = f(x-t)$