ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ:

09/04/2024

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί το ΠΑΤ (Cauchy): $u_t(x,t) + x u_x(x,t) = u(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$

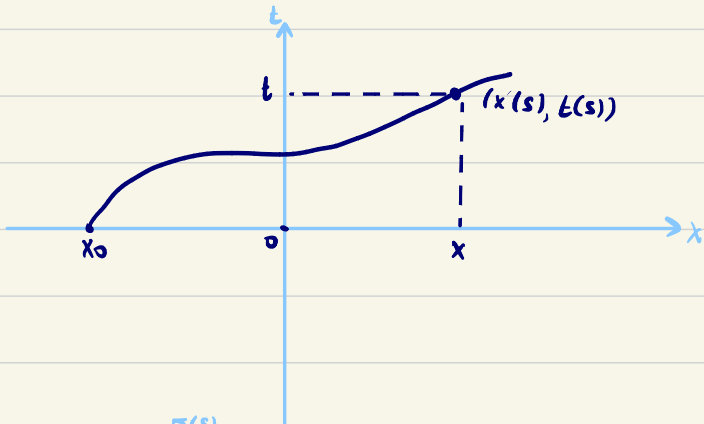
$$u(x,0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

όπου $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση. Πόσο ομαλή πρέπει να είναι η συνάρτηση για να υπάρχει κλασσική λύση;

Η λύση δηλαδή πρέπει να ικανοποιεί: $u: \mathbb{R} \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$$

Λύση:



Θέλουμε $\frac{d}{ds} \overbrace{u(x(s), t(s))}^{\sigma(s)} = u_x(x(s), t(s)) x'(s) + u_t(x(s), t(s)) t'(s)$

να μας κάνει το πρώτο μέλος δηλαδή: $x'(s) = x(s), \quad x(0) = x_0$

$$t'(s) = 1, \quad t(0) = 0$$

$$\sigma'(s) = u(x(s), t(s)) = \sigma(s), \quad \sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = f(x_0)$$

$x'(s) = x(s)$, $x(0) = x_0$ $\qquad e^{-s} \cdot x'(s) - e^{-s} \cdot x(s) = 0$, $x(0) = x_0$

$t'(s) = 1$, $t(s) = 0$ $\qquad \Leftrightarrow t(s) = s$

$(e^{-s} x(s))' = 0 \Leftrightarrow e^{-s} x(s) = e^{-0} x(0)$

$\Leftrightarrow e^{-s} x(s) = x_0$

$\Leftrightarrow x(s) = x_0 e^{s}$

$(x(s), t(s)) = (x_0 e^{s}, s)$, $s \geq 0$

$\sigma'(s) = \sigma(s)$, $\sigma(0) = f(x_0)$

$e^{-s} \sigma'(s) - e^{-s} \sigma(s) = 0 \Leftrightarrow (e^{-s} \sigma(s))' = 0$

$e^{-s} \sigma(s) = e^{0} \sigma(0) = f(x_0) \Leftrightarrow \sigma(s) = f(x_0) e^{s}$

$u(x(s), t(s)) = f(x_0) e^{s}$

$u(x_0 e^{s}, s) = f(x_0) e^{s}$

Έστω $\bar{s}$ $\quad (x(\bar{s}), t(\bar{s})) = (x, t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 e^{\bar{s}} = x \\ \bar{s} = t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = x e^{-t} \\ \bar{s} = t \end{bmatrix}$

και επομένως έχουμε: $u(x_0 e^{s}, s) = f(x_0) e^{s}$, επιλέγουμε $s = \bar{s}$

$u(x_0 e^{\bar{s}}, \bar{s}) = f(x_0) e^{\bar{s}}$

$u(x, t) = f(x e^{-t}) e^{t}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

Αν η $f \in C^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

και μάλιστα: $u_t(x, t) = f(x e^{-t}) e^{t} + f'(x e^{-t}) \cdot (x e^{-t})_t e^{t}$

$= f(x e^{-t}) e^{t} + f'(x e^{-t})(-x e^{-t}) e^{t}$

$= f(x e^{-t}) e^{t} - x f'(x e^{-t})$

$$u_x(x,t) = f'(xe^{-t})(xe^{-t})_x e^t$$
$$= f'(xe^{-t})\, e^{-t} e^t$$
$$= f'(xe^{-t})$$

wor $\quad u_t + x u_x = f(xe^{-t})e^t - x f'(xe^{-t}) + x f'(xe^{-t})$
$$= f(xe^{-t})\, e^t$$
$$= u(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} u(x,t) = \lim_{t \to 0^+} f(xe^{-t})e^t = \lim_{t \to 0^+} f(xe^{-t}) \cdot \lim_{t \to 0^+} e^t$$

$$= f(x \lim_{t \to 0^+} e^t)\, 1$$
$$= f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x = \gamma(x,t,u)$$

$$\frac{d}{ds}\underbrace{u(x(s),t(s))}_{\sigma(s)} = u_x x'(s) + u_t t'(s)$$

Επιλέγουμε στην καμπύλη να ικανοποιείται:

$x'(s) = b(x(s), t(s), \sigma(s))$

$t'(s) = a(x(s), t(s), \sigma(s))$

$\sigma'(s) = \gamma(x(s), t(s), \sigma(s))$

$(x(0), t(0))$ σημείο αρχικών δεδομένων

$\sigma(0) = \gamma(x_0, t_0, f(x_0))$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί το ΠΑΤ: $u_t(x,t) + u_x(x,t) = u^2(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ $t>0$

$u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

όπου $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, 0]$ συνεχής φραγμένη συνάρτηση. Τι γίνεται εάν η f παίρνει και θετικές τιμές;

Λύση:

Επιλέγουμε τη χαρακτηριστική καμπύλη $(x(s), t(s))$ να είναι τέτοια ώστε $\frac{d}{ds}\underbrace{(x(s), t(s))}_{\sigma(s)} = u_x x' + u_t t'$

$$\left.\begin{array}{ll} x'(s) = 1, & x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1, & t(0) = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(s) = x_0 + s, \quad s \geq 0 \\ t(s) = s \end{array}\right.$$

Και τότε $\sigma'(s) = u^2(x(s), t(s)) = \sigma^2(s)$

$$\sigma(0) = u(x(0), t(0)) = u(x, 0) = f(x_0)$$

Εαν $f(x_0) = 0$, $\sigma'(s) = \sigma^2(s)$, $\sigma(0) = 0 \Rightarrow \sigma(s) = 0$

$\sigma(0) = f(x_0) < 0 \Rightarrow 0 \le s < s_1$, $\sigma(s) < 0$

$$\sigma'(s) = \sigma^2(s) \Leftrightarrow \frac{\sigma'(s)}{\sigma^2(s)} = 1$$

$$\left(-\frac{1}{\sigma(s)}\right) = (s)' \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma(s)} - s = -\frac{1}{\sigma(0)} - 0, \quad s \ge 0$$

$$\frac{1}{\sigma(s)} = \frac{1}{f(x_0)} - s \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+s, s)} = \frac{1}{f(x_0)} - s$$

Αν $\left|\begin{array}{l} x_0 + \bar{s} = x \\ \bar{s} = t \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_0 = x - t \\ \bar{s} = t \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(x_0+\bar{s}, \bar{s})} = \frac{1}{f(x_0)} - \bar{s} \Leftrightarrow \frac{1}{u(x,t)} = \frac{1}{f(x-t)} - t < 0$$

αν $f(x-t) < 0$

$$\Leftrightarrow u(x,t) = \frac{1}{\frac{1}{f(x-t)} - t}, \quad t > 0$$

$$= \frac{f(x-t)}{1 - t f(x-t)} \quad \forall \; x \in \mathbb{R}, \; t \ge 0$$

Ποια θα ήταν η λύση αν: $\sigma'(s)=\sigma^2(s)$ $\exists$ $0\leq s<s_1$ $\sigma(s)>0$

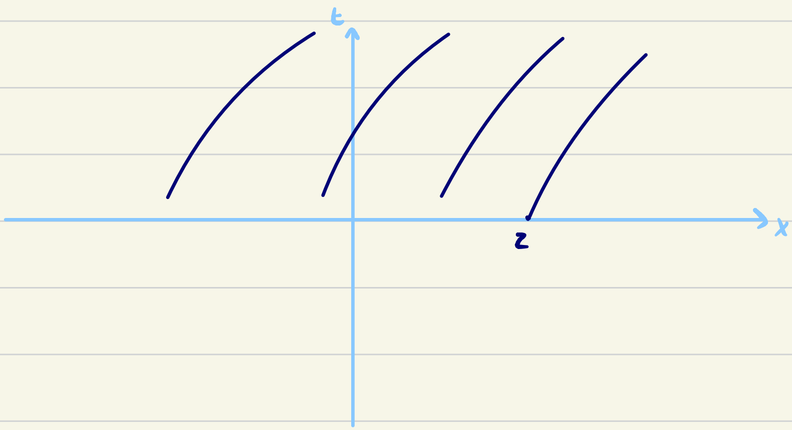
$$\sigma(0)=f(x_0)>0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{\sigma(s)}-s\right)'=0$$

$$\frac{1}{\sigma(s)}+s=\frac{1}{\sigma(0)} \Leftrightarrow \frac{1}{u(x_0+s,s)}=\frac{1}{f(x_0)}-s>0$$

$$\frac{1}{f(x-t)}>t \Leftrightarrow f(x-t)<\frac{1}{t}, \quad t>0$$

Η συνθήκη $x-t<\frac{1}{t} \Leftrightarrow x<t+\frac{1}{t}$



$$t^2+1-xt=0$$

$$t^2-xt+1=0$$

$$\Delta=x^2-4$$

$$t=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Η εισαγωγή της παραμέτρου: $(x(s),t(s))$ θα γίνει $\frac{d}{ds}\underbrace{u(x(s),t(s))}_{\sigma}=u_x x'+u_t t'$

$$\left.\begin{aligned} x'(s)&=b(x(s),t(s),\sigma(s))\\ t'(s)&=a(x(s),t(s),\sigma(s))\\ \sigma'(s)&=\gamma(x(s),t(s),\sigma(s)) \end{aligned}\right\}$$

$$a(x,t,u)u_t+b(x,t,u)u_x=\gamma(x,t,u)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΔΕ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ:

$$a(x,y)\,u_{xx}(x,y) + 2\beta(x,y)\,u_{xy}(x,y) + \gamma(x,y)\,u_{yy}(x,y) + \delta(x,y)\,u_x(x,y) + \varepsilon(x,y)\,u_y(x,y)$$
$$+\ \zeta(x,y)\,u(x,y) = f(x,y)$$

Κυματική Εξίσωση: $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}$

Εξίσωση θερμότητας: $u_t = k\,u_{xx}$

Εξίσωση Poisson: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$

(ελλειπτικού τύπου)

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ Αρμονικές συναρτήσεις

Τι είδους είναι;

Υποθέτουμε:

$$u(x,y) = v(\xi,\eta)$$

$$u_x(x,y) = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y(x,y) = v_\xi \xi_y + v_y \eta_y$$

$$u_{xx} = (v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + v_\xi \xi_{xx} + (v_{\eta\xi}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x + v_\eta \eta_{xx}$$

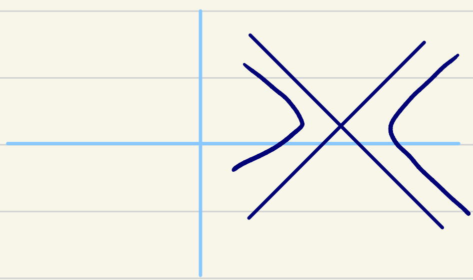
$$\Delta(x,y) = 4\beta^2(x,y) - 4a(x,y)\gamma(x,y) = 4(\beta^2(x,y) - a(x,y)\gamma(x,y))$$

$$ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y = \eta$$

$\Delta = 4(\beta^2 - a\gamma) > 0$: Υπερβολή

$\Delta = 0$: Παραβολή

$\Delta < 0$: Έλλειψη.

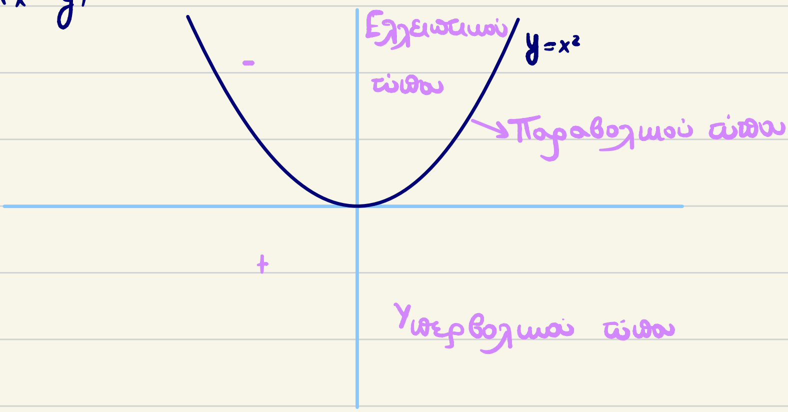


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 11/04/2024

Δίνεται η Δ.Ε $u_{xx}(x,y)+2x\,u_{xy}+y\,u_{yy}(x,y)=0$. Βρείτε τα σημεία του επιπέδου $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ που η Δ.Ε είναι ελλειπτικού τύπου, παραβολικού τύπου και υπερβολικού τύπου.

Λύση:

$$\Delta(x,y)=(2x^2)-4\cdot 1y$$
$$=4(x^2-y)$$



$$\alpha u_{xx}(x,y)+2\beta u_{x,y}(x,y)+\gamma u_{yy}(x,y)+\delta u_x+\varepsilon u_y+\zeta u=0$$

$\xi=\kappa x+\lambda y$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\kappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\eta=\mu x+\nu y$

$\kappa\nu-\lambda\mu\neq 0$

Είδος: $\Delta=4\beta^2-4\alpha\gamma=4(\beta^2-\alpha\gamma)\begin{cases}>0, & \text{υπερβολικού τύπου}\\ =0, & \text{παραβολικού τύπου}\\ <0, & \text{ελλειπτικού τύπου}\end{cases}$

$u(x,y) = w(\xi, \eta)$

Ποια είναι η κανονική μορφή:

(A) <u>Υπερβολικού τύπου:</u> $w_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ + χαμηλότερη τάξη παραβολής >0

(B) <u>Ελλειπτικού τύπου:</u> $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}$ + χαμηλότερη τάξη παραβολής ≤ 0

(Γ) <u>Παραβολικού τύπου:</u> $w_{\eta} - w_{\xi\xi}$ + χαμηλότερη τάξη παραβολής $=0$

(εξίσωση θερμότητας

$\xi = kx + \lambda y$

$\eta = \mu x + \nu y$

$k\nu - \lambda\mu \neq 0$

$u(x,y) = w(\xi,\eta)$

$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x$

$= k w_\xi + \mu w_\eta$

$u_{xx} = k(w_{\xi\xi}\xi_x + w_{\xi\eta}\eta_x) + \mu(w_{\eta\xi}\xi_x + w_{\eta\eta}\eta_x)$

$= k(k w_{\xi\xi} + \mu w_{\xi\eta}) + \mu(k w_{\eta\xi} + \mu w_{\eta\eta})$

$= k^2 w_{\xi\xi} + 2k\mu w_{\xi\eta} + \mu^2 w_{\eta\eta}$

$u_{xy} = (k w_\xi + \mu w_\eta)_y$

$= k(w_{\xi\xi}\xi_y + w_{\xi\eta}\eta_y) + \mu(w_{\eta\xi}\xi_y + w_{\eta\eta}\eta_y)$

$= k(\lambda w_{\xi\xi} + \nu w_{\xi\eta}) + \mu(\lambda w_{\eta\xi} + \nu w_{\eta\eta})$

$= k\lambda w_{\xi\xi} + (k\nu + \mu\lambda) w_{\eta\xi} + \mu\nu w_{\eta\eta}$

$u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y$

$\quad = \lambda w_\xi + \nu w_\eta$

$u_{yy} = \lambda(w_{\xi\xi}\xi_y + w_{\xi\eta}\eta_y) + \nu(w_{\eta\xi}\xi_y + w_{\eta\eta}\eta_y)$

$\quad = \lambda(\lambda w_{\xi\xi} + \nu w_{\xi\eta}) + \nu(\lambda w_{\eta\xi} + \nu w_{\eta\eta})$

$\quad = \lambda^2 w_{\xi\xi} + 2\lambda\nu w_{\xi\eta} + \nu^2 w_{\eta\eta}$

και η Δ.Ε γίνεται:

$$\alpha(\kappa^2 w_{\xi\xi} + 2\kappa\mu w_{\xi\eta} + \mu^2 w_{\eta\eta}) + 2\beta(\kappa\lambda w_{\xi\xi} + (\kappa\nu + \mu\lambda) w_{\eta\xi} + \mu\nu w_{\eta\eta})$$
$$+ \gamma(\lambda^2 w_{\xi\xi} + 2\lambda\nu w_{\xi\eta} + \nu^2 w_{\eta\eta}) + \text{πρώτη} = 0$$

$$(\alpha\kappa^2 + 2\beta\kappa\lambda + \gamma\lambda^2) w_{\xi\xi} + (2\alpha\kappa\mu + 2\beta(\kappa\nu + \mu\lambda) + 2\gamma\lambda\nu) w_{\xi\eta} + (\alpha\mu^2 + 2\beta\mu\nu + \gamma\nu^2) w_{\eta\eta} + \ldots = 0$$

(A) Υπερβολικού τύπου. $\Delta = 4(\beta^2 - \alpha\gamma) > 0$

$\alpha\kappa^2 + 2\beta\kappa\lambda + \gamma\lambda^2 = 0$

$\alpha\mu^2 + 2\mu\beta\nu + \gamma\nu^2 = 0$

$2\alpha\kappa\mu + 2\beta(\kappa\nu + \mu\lambda) + 2\gamma\lambda\nu \neq 0$