(συνέχεια παρ.)

16/04/2024

$\xi = kx + \lambda y$

$n = \mu x + \nu y$

$k\nu - \lambda\mu \neq 0$

$a u_{xx} + 2\beta u_{xy} + \gamma u_{yy} + \delta u_x + \varepsilon u_y + \zeta u = 0$

$u(x, y) = w(\xi, n)$

$$a(k^2 w_{\xi\xi} + 2k\mu w_{\xi n} + \mu^2 w_{nn}) + 2\beta(k\lambda w_{\xi\xi} + (k\nu + \mu\lambda) w_{\xi n} + \mu\nu w_{nn})$$
$$+ \gamma(\lambda^2 w_{\xi\xi} + 2\lambda\nu w_{\xi n} + \nu^2 w_{nn}) + \delta(k w_\xi + \mu w_n) + \varepsilon(\lambda w_\xi + \nu w_n) + \zeta w = 0$$

Τελική μορφή Δ.Ε.:

$$(a k^2 + 2\beta k\lambda + \gamma\lambda^2) w_{\xi\xi} + (2ak\mu + 2\beta(k\nu + \mu\lambda) + 2\gamma\lambda\nu) w_{\xi n} + (a\mu^2 + 2\beta\mu\nu + \gamma\nu^2) w_{nn}$$
$$+ (\delta k + \varepsilon\lambda) w_\xi + (\delta\mu + \varepsilon\nu) w_n + \zeta w = 0$$

$\Delta = 4(\beta^2 - a\gamma)$ $\qquad w_{\xi\xi} - w_{nn}$ + πρώτης τάξη $= 0$

(i) $\beta^2 - a\gamma > 0$ υπερβολικού τύπου, $w_{\xi n}$ + πρώτη τάξη $= 0$

(ii) $\beta^2 - a\gamma = 0$ παραβολικού τύπου, $w_{\xi\xi} - w_n = 0$

(iii) $\beta^2 - a\gamma < 0$ ελλειπτικού τύπου, $w_{\xi\xi} + w_n$ + πρώτης τάξης $= 0$

Έστω τώρα $\Delta = 4(\beta^2-\alpha\gamma) > 0$. Θέλουμε να επιλέξουμε $\kappa, \lambda, \mu, \nu$

ώστε: $\alpha\kappa^2 + 2\beta\kappa\lambda + \gamma\lambda^2 = 0$

$\alpha\mu^2 + 2\beta\mu\nu + \gamma\nu^2 = 0$

& $2\alpha\kappa\mu + 2\beta(\kappa\nu + \mu\lambda) + 2\gamma\lambda\nu = 0$

$$\kappa = \frac{-2\beta\lambda \pm \sqrt{4\beta^2\lambda^2 - 4\alpha\gamma\lambda^2}}{2\alpha} = \frac{-\beta\lambda \pm \lambda\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha}\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right)$$

<u>Επιλέγω</u>: $\cdot\ \alpha\kappa = \lambda\left(-\beta + \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right)$

$\cdot\ \alpha\mu = \nu\left(-\beta - \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right)$

$$\kappa\nu - \lambda\mu = \frac{\nu\lambda}{\alpha}\left(-\beta + \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right) - \frac{\lambda\nu}{\alpha}\left(-\beta - \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right)$$

$$= \frac{\nu\lambda}{\alpha}\left(-\cancel{\beta} + \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma} + \cancel{\beta} + \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right)$$

$$= 2\,\frac{\nu\lambda}{\alpha}\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma} \neq 0$$

$$2(\alpha\kappa\mu + \beta(\kappa\nu + \mu\lambda) + \gamma\lambda\nu) = 2\left(\frac{1}{\alpha}\mu\lambda(-\beta+\sqrt{\Delta}) + \beta\left(\frac{\nu\lambda}{\alpha}(-\beta+\sqrt{\Delta}) + \frac{\nu}{\alpha}(-\beta-\sqrt{\Delta})\right) + \gamma\lambda\nu\right)$$

$$= \frac{2}{\alpha}\left(\alpha\mu\lambda(-\beta+\sqrt{\Delta}) + \nu\lambda\beta(-\beta+\sqrt{\Delta}) + \nu\lambda\beta(-\beta-\sqrt{\Delta}) + \lambda\nu\gamma\alpha\right)$$

$$= \frac{2}{\alpha}\left(\mu\lambda(-\beta+\sqrt{\Delta}) + \lambda\nu\beta(-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}) + \lambda\nu\gamma\alpha\right)$$

$$= \dots$$

## ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , $x \in \mathbb{R}$ , $t > 0$

$u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

**Λύση:**

$a = -1$ , $\beta = 0$, $\gamma = 1$

$-\kappa^2 + \lambda^2 = 0 \iff (\lambda - \kappa)(\lambda + \kappa) = 0 \iff \lambda = \kappa = 1$

$-\mu^2 + \nu^2 = 0 \iff (\nu - \mu)(\nu + \mu) = 0 \iff \mu = -\nu = -1$

Θέλω $\kappa\nu - \lambda\mu \neq 0$

$\qquad \overset{\shortparallel}{\lambda\nu - \lambda(-\nu)} = 2\lambda\nu \neq 0$

$2(-\kappa\mu + \lambda\nu) = 2 \cdot (1+1) = 4.$

$u_{tt} - u_{xx} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &u(x,t) = w(\xi, n) \\ &\xi = x + t \\ &n = -x + t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\iff 4\, w_{\xi n}(\xi, n) = 0 \\ &\iff w_{\xi n}(\xi, n) = 0 \\ &\quad (w_\xi(\xi, n))_n = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow w_\xi(\xi, n) = F(\xi) = \frac{d}{d\xi}\varphi(\xi) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{d\xi}(w(\xi, n) - \varphi(\xi)) = 0$

$\Rightarrow \exists\, h: w(\xi, n) - \varphi(\xi) = h(n)$

$$w(\xi, n) = A(\xi) \cdot B(n)$$

$$u(x,t) = A(x+t) + B(-x+t)$$

$$= A(x+t) + \Gamma(x-t)$$

<u>Αρχικές συνθήκες</u>: $u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow A(x) + B(x) + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$u_t(x,t) = A'(x+t) + B'(-x+t)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Leftrightarrow A'(x) + B'(-x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$A(x) + B(-x) = f(x)$$

$$A'(x) + B'(-x) = g(x) \Rightarrow A(x) + B(-x) = c + \int_0^x g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow (A(x) - B(x))_x = g(x) = \left(\int_0^x g(s)\,ds\right)$$

$$\Leftrightarrow A(x) - B(x) - \int_0^x g(s)\,ds = 0$$

Το σύστημα: $A(x) + B(-x) = f(x)$

$$A(x) + B(-x) + \int_0^x g(s)\,ds$$

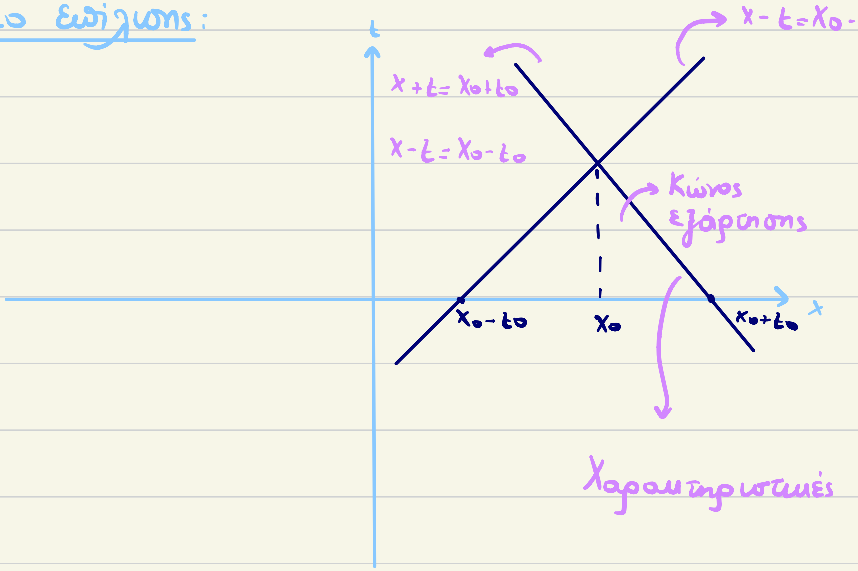
$$\Leftrightarrow A(x) = \frac{c}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds$$

$$B(-x) = f(x) - \frac{c}{2} - \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds$$

$$= -\frac{c}{2} + \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} g(s)\,ds \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ , \ t \geq 0$$

Χωρίο εξάρτησης:




$f \in C^2(\mathbb{R})$

$g \in C^1(\mathbb{R})$

## ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ:

$u_t = u_{xx} \quad 0<x<\pi \, , \quad t>0$

ΣΣ : $u(0,t) = 0 = u(\pi, t) \quad , \; t>0$

Α.Σ : $u(x,0) = f(x)$

## Fourier:

Θα βρούμε τη γενική λύση : $u_t = u_{xx} \quad 0<x<\pi \, , \; t>0$

$u(0,t) = 0 \quad u(\pi,t) = 0 \, , \; t>0$

Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή $u(x,t) = A(x)B(x)$

(Θέλουμε λύσεις που δεν είναι ταυτοτικά 0.)

Ξεκινάμε από τις συνοριακές συνθήκες (ΣΣ):

$u(0,t) = 0 \quad \forall \; t>0$

$\Updownarrow$

$A(0) \cdot B(t) = 0 \quad t>0$

και εφόσον θέλουμε η λύση να μην είναι ταυτοτικά μηδέν $\exists \; t_1 : B(t_1) \neq 0.$

**Πρέπει**: $A(0) = 0$

**ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ**: $u(\pi, t) = 0 \Leftrightarrow A(\pi) B(t) = 0$

$\Rightarrow \boxed{A(\pi) = 0}$

και από Δ.Ε : $u(x,t) = A(x) B(t) \Rightarrow u_t(x,t) = A(x) \cdot B'(t)$

$u_x(x,t) = A'(x) \cdot B(t)$

$u_{xx}(x,t) = A''(x) \cdot B(t)$

$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad 0<x<\pi \;, \; t>0$

$\Updownarrow$

$A(x)B'(t) = A''(x)B(t) \;, \quad 0<x<\pi \quad t>0$

ΛΗΜΜΑ:

Έστω $A, B : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Gamma, \Delta : (\gamma,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $A(x)\Gamma(t) = B(x)\Delta t$ $x\in(a,b)$ $t\in(\kappa,\lambda)$

Έστω επίσης $\exists \; x_1, x_2 \in (a,b) : A(x_1) \neq A(x_2)$

Διακρίνουμε σε περιπτώσεις:

(i) Εάν $A(x) = c \neq 0$ $\quad c\Gamma(t) = B(x)\cdot\Delta(t_0) \;, \; \forall \; x\in(a,b) \quad t\in(\kappa,\lambda)$

έστω $t_0 \in (\kappa,\lambda)$ $\Delta(t_0) \neq 0 \Rightarrow B(x) = c\dfrac{\Gamma(t_0)}{\Delta(t_0)}$

$\Rightarrow A(x_1)\Gamma(t) = B(x_1)\cdot\Delta(t)$

$A(x_2)\Gamma(t) = B(x_2)\Delta(t)$

$\Rightarrow (A(x_2) - A(x_1))\Gamma(t) = (B(x_0) - B(x_1)\cdot\Delta(t)$

$\Rightarrow \Gamma(t) = \dfrac{B(x_2)-B(x_1)}{A(x_2)-A(x_1)}\Delta(t).$

Εάν A δεν είναι σταθερή $\overset{\varepsilon\neq 0}{\Rightarrow} \Gamma(t) = \varepsilon\Delta(t) \;, \; t\in(\kappa,\lambda)$

$A(x)\cdot\varepsilon\Delta(t) = B(x)\cdot\Delta(t)$

$(B(x) - \varepsilon A(x))\Delta(t) = 0$

Εάν A δεν είναι σταθερή

$\Rightarrow \Gamma(t) = \varepsilon\Delta(t) \qquad \Rightarrow B(x) = \varepsilon\cdot A(x)$

$B(x) = \varepsilon A(x)$

• Εαν $A(x)B(x)$ δεν είναι ταυτοτικά 0

$\Rightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ $A''(x) = \lambda A(x)$ , $0 < x < n$ και επίσης

$A(x)B'(t) = \lambda A(x)B(t)$

& $B'(t) = \lambda B(t)$ $\forall\ t > 0 \Rightarrow B(t) = B(0)e^{\lambda t}$ , $t > 0$

$A''(x) = \lambda A(x)$ , $0 < x < n$

$A(0) = A(n) = 0$

## Fourier:

18/04/2024

Θα βρούμε τη γενική λύση: $u_t = u_{xx}$ $\quad 0<x<\pi \;,\; t>0$

$u(0,t)=0 \quad u(\pi,t)=0 \;,\; t>0$

Ψάχνουμε για λύσεις στη μορφή $u(x,t) = A(x)B(x)$

(Θέλουμε λύσεις που δεν είναι ταυτοτικά 0.)

Από ΣΣ $\Rightarrow A(0)=0=A(\pi)$ και από τη Δ.Ε $A(x)\cdot B'(t) = A''(x)\cdot B(t)$ $\quad 0<x<\pi,$

$t>0.$

Επιλέγουμε το: $B(t_0)\neq 0$ και τότε $A''(x) = \dfrac{B'(t_0)}{B(t_0)}\cdot A(x)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} A''(x) = \lambda A(x) & \forall \quad 0<x<\pi \\ A(0) = A(\pi) = 0 & \end{array}\right.$$

Γυρίζουμε πίσω: $A(x)\cdot B'(t) = \lambda A(x)\cdot B(t)$

επιλέγουμε $x_0$: $A(x_0)\neq 0$

$$A(\cancel{x_0})\cdot B'(t) = \lambda A(\cancel{x_0})\cdot B(t)$$

$$B'(t) = \lambda B(t)$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρούμε $\lambda\in\mathbb{R}$: $\exists$ μη τετρ. λύση

$A''(x) = \lambda A(x) \qquad 0<x<\pi$

$A(0) = A(\pi) = 0$

Η χαρ. εξίσωση είναι $e^{kx} \Rightarrow k^2 = \lambda$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: • $\lambda>0$, $k=\pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow A(x)=c_1e^{x\sqrt{\lambda}}+c_2e^{-x\sqrt{\lambda}}$

• $\lambda=0 \Rightarrow A(x)=\mu x+\nu$, $\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \Leftrightarrow \nu=0 \\ A(n)=0 \Leftrightarrow \mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=0$

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=c_1\cdot e^{x\sqrt{\lambda}}+c_2\cdot e^{-x\sqrt{\lambda}} \\ A(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \\ A(n)=0 \Leftrightarrow c_1e^{n\sqrt{\lambda}}+c_2\cdot e^{-n\sqrt{\lambda}}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{n\sqrt{\lambda}} & e^{-n\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{n\sqrt{\lambda}} & e^{-n\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}=e^{-n\sqrt{\lambda}}-e^{n\sqrt{\lambda}}$$

$$=e^{n\sqrt{\lambda}}(e^{-2n\sqrt{\lambda}}-1)\neq 0$$

$\Rightarrow c_1=c_2=0$ απορ. $\lambda>0$

$\lambda<0$ $\quad k^2=\lambda=i^2(-\lambda) \Rightarrow k=\pm i\sqrt{-\lambda}$

$$\Rightarrow e^{ix\sqrt{-\lambda}}=\cos(x\sqrt{-\lambda})+i\sin(x\sqrt{-\lambda})$$

$$\Rightarrow \cos(\sqrt{-\lambda}\,x),\ \sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$$

Επομένως η γενική λύση: $A(x)=c_1\cos(x\sqrt{-\lambda})+c_2\sin(x\sqrt{-\lambda})$

$$A(0)=0 \Leftrightarrow c_1\cdot 1+c_2\cdot 0=0$$

$$\Leftrightarrow c_1=0$$

$$A(n)=0 \Leftrightarrow c_2\sin(n\sqrt{-\lambda})=0$$

$$\Leftrightarrow \sin(n\sqrt{-\lambda})=0$$

$$\cancel{n}\cdot\sqrt{-\lambda_k}=k\cancel{n},\ k\in\mathbb{N}$$

$$\sqrt{-\lambda_k}=k,\ k\in\mathbb{N}$$

$A_k(x) = \sin(kx)$

Ιδιοτιμές: $\lambda_k = -k^2, \quad k \in \mathbb{N}$

Ιδιοσυνάρτηση: $A_k(x) = \sin kx$

$B'_k(t) = \lambda_k B_k(t) = B'_k(t) = -k^2 B_k(t) \Rightarrow B_k(t) = e^{-kt}$

$\Rightarrow u_k(x,t) = e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad , k \in \mathbb{N}$

Αρχή υπέρθεσης: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-k^2 t} \sin(kx)$

Αρχικές συνθήκες: $u(x,0) = f(x)$

Θα θέλαμε: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad t > 0$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(kx)$$

Αν $f(x) = 2024 \sin 3x + 5 \sin 7x$

$\Rightarrow u(x,t) = 2024 e^{-3^2 t} \sin 3x + 5 e^{-7^2 t} \sin 7x$

$C_3 = 2024$

$C_7 = 5$

$C_k = 0$

$k \neq 3, 5$

## Ερώτηση:

Πότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη: $u(x,t)=A(x)\cdot B(t)$

**Απάντηση:**

↳ η Δ.Ε πρέπει να είναι γραμμική

↳ Ποιο είναι το χωρίο που να έχει τη συμμετρία.

↳ ο διαφορικός τελεστής να υποστηρίζει τη συμμετρία.

Π.χ. $u_t=k(1+x^2+t^2)u_{xx}$ Δεν υποστηρίζει λύσεις στη μορφή $A(x)\cdot B(t)$

όμως $u_t=g(x)\,u_{xx}$ Υποστηρίζει

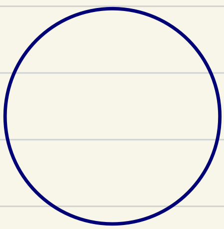
$u_t=h(t)\,u_{xx}$ Υποστηρίζει

$u_t=g(x)\cdot g(t)$ Υποστηρίζει.

(Αρμονικές συναρτήσεις) $u_{tt}=u_{xx}$ $\quad 0<x<\pi \quad t>0$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad 0<x<\pi \;,\; 0<y<\pi$$



$x^2+y^2<1$ $\qquad u(x,y)=A(x)\cdot B(y)\longrightarrow u(x,y)=A(\rho)B(\theta)$

(πολικές συντεταγμένες)

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta \qquad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$