Τρίτη 15 Οκτωβρίου 2013

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Φυλλάδιο 1

1). Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι οι υπακολουθίες

$$a_{2n}, \quad a_{2n-1}, \text{ και } a_{3n}$$

είναι συγκλίνουσες. Αποδείξτε τότε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

2). Δίνεται το σύνολο

$$A = \{2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \in I\!N\}.$$

Αποδείξτε ότι πρόκειται για φραγμένο σύνολο και βρείτε με απόδειξη τα

$$\sup A, \quad \inf A.$$

3). Να εισάγετε κατάλληλο σύνολο, το οποίο να είναι άνω φραγμένο και το supremum του οποίου να είναι η κυβική ρίζα του αριθμού 3. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας με χρήση του αξιώματος της πληρότητας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

09/10/13

Ασκήσεις

1. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένα τότε

$$\sup A \leq \sup B$$

Λύση

Για κάθε $a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq \underbrace{\sup B}$ μικρότερο άνω φράγμα για το A.

άρα $\underbrace{\text{οποιοσδήποτε αριθμός}} \leq \sup B$

$$\sup A \leq \sup B.$$

2. Ποια η συσχέτιση των A, B άνω φραγμένα $\subseteq \mathbb{R}$ $\sup(A\cup B)$ με το $\sup A$, $\sup B$.

Λύση

Θέλω $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

(από δύο ανισότητες θα προκύψει η ισότητα)

$$A \subseteq A\cup B \Rightarrow \sup A \leq \sup(A\cup B)$$
$$B \subseteq A\cup B \Rightarrow \sup B \leq \sup(A\cup B)$$

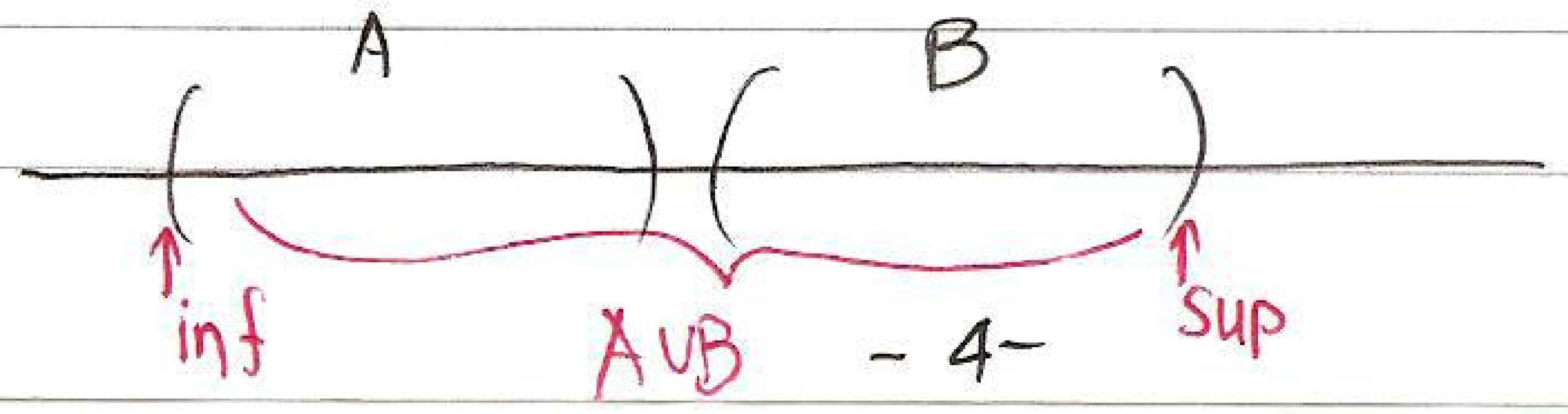
$$\Rightarrow \underset{\sup A}{\underset{\|}{\max(\sup A, \sup B)}} \leq \sup(A\cup B)$$

Εάν $\sup A \geq \sup B$

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \sup A - \varepsilon < a \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A\cup B$

$\exists a \in A \subseteq A\cup B$ $\quad$ τέτοιο ώστε $\sup A - \varepsilon < a$

Άρα $\sup(A\cup B) \leq a$.



Έστω $\sup A \geq \sup B \Rightarrow \sup A \geq \sup(A\cup B)$
και είχα ότι $\sup A \leq \sup(A\cup B)$

[Παίρνω τυχαίο $\varepsilon > 0$ άρα $\exists\, a \in A$ τ.ω $\sup A - \varepsilon < a$

Όμως $a \in A\cup B$ επομένως $\sup A - \varepsilon < a$]

Θεωρώ ότι $\sup A \geq \sup B$

$$\left.\begin{array}{ll} a \in A, & a \leq \sup A \\ b \in B, & b \leq \sup B \leq \sup A \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \forall a \leq \sup A \\ \forall b \leq \sup A \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \forall z \in A\cup B \\ z \leq \sup A \end{array}$$

$\Rightarrow \sup(A\cup B) \leq \sup A$.

3. Έστω A, B άνω φραγμένα $\subseteq \mathbb{R}$.
Ορίζουμε

$$A+B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$$

Συσχετίστε το $\sup(A+B)$ με το $\sup A, \sup B$.

Λύση

Από το Αξίωμα της Πληρότητας αν A είναι άνω φραγμένο
τότε: 1) $a \leq \sup A$ $\forall a \in A$
2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, b \in A$ τω $\sup A - \varepsilon < b$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall a \in A & a \leq \sup A \\ \forall b \in B & b \leq \sup B \end{array}\right\} \; a+b \leq \underbrace{\sup A + \sup B}_{\text{είναι άνω φράγμα του } A+B} \; (*)$$

άρα $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A: & \sup A - \varepsilon/2 < a \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, b \in B: & \sup B - \varepsilon/2 < b \end{array}\right\} \text{από χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum}$$

$\sup A + \sup B < a + b + \varepsilon \leq \sup(A+B) + \varepsilon$ (*)
και $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$
Από δύο ανισότητες προκύπτει ισότητα

4. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει.

<u>Λύση</u>

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$a_n \leq a_{n+1} \quad \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$ άρα $a_n \uparrow$

άρα θέλω να βρω ένα άνω φράγμα.

$a_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ άρα έχει άνω φράγμα

(Μπορώ να δω το φράγμα και από την ανισότητα $\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n\text{-φορές}} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

5. Με χρήση αξιώματος της πληρότητας ν.δ.ο η $x^3 = 2$ έχει ρίζα.

6. $A = \{ (-1)^n + \frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N} \}$

Να βρεθούν τα supA, infA

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Φυλλάδιο 1

1.) Γνωρίζω ότι οι: a_{2n}, a_{2n-1}, a_{3n} είναι συγκλίνουσες άρα τα όριά τους υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b$ $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = c$

Η $\underline{a_{6n}}$ είναι υπακολουθία της a_{2n} και της a_{3n} άρα θα συγκλίνει στο a και στο c, επομένως

$$\boxed{a=c}$$

Όμοια θα πάρω την $\underline{a_{3(2n-1)}}$ είναι υπακολουθία της a_{2n-1} και της a_{3n}, άρα θα συγκλίνει στο b και στο c επομένως

$$\boxed{b=c}$$

Άρα $a=b=c$

Αφού οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων συγκλίναν στο ίδιο όριο άρα και η ακολουθία μας a_n είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Έχω ότι $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ και $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$, άρα αφού

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_{2n} - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_{2n-1} - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$

Για $N = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ τότε $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$

2) Για ν.δ.ο το σύνολό μου είναι φραγμένο, αρκεί να βρω κάποιο άνω φράγμα και κάποιο κάτω φράγμα.

Θα πάω ν.δ.ο έχει άνω φράγμα:

$$2+\frac{(-1)^n}{n+1} \le \left|2+\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \le 2+\frac{1}{n+1} \underset{n\geq 1}{\le} \frac{5}{2}$$ → άνω φραγμένη

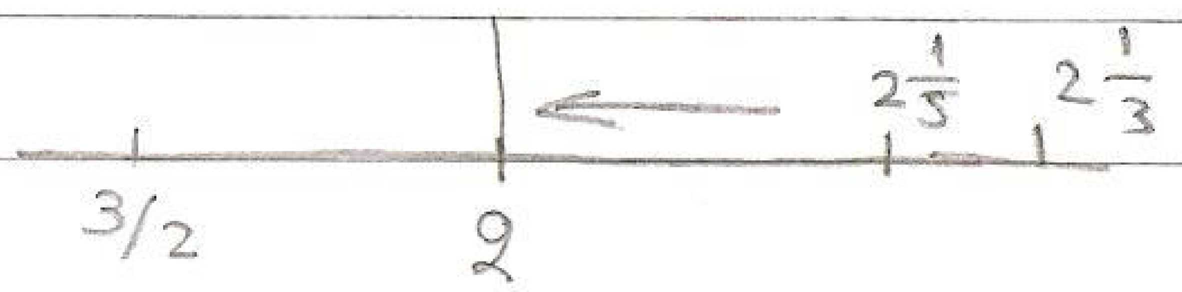
Για ν.δ.ο είναι κάτω φραγμένη:

$$2+\frac{(-1)^n}{n+1} \geq 2-\frac{1}{n+1}$$ (αρκεί να το μικρύνω δηλ να μικρύνω το $\frac{1}{n+1}$ άρα να μεγαλώσω τον παρονομαστή)

δηλ. $2-\frac{1}{n+1} \geq 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ άρα βρήκα κάτω φράγμα.

άρα το σύνολό μου A είναι φραγμένο

Για $n=2k$



$$2+\frac{1}{2k+1}$$ για $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.

Για $n=2k-1$

$$2-\frac{1}{2k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

$\inf A = \frac{3}{2} = \min A$

$\sup A = 2\frac{1}{3} = \max A$

3.) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1 \quad ,x^3\leq 3\}$ Τότε το $1\in A$ άρα $1^3\leq 3$
και επειδή $\forall x\in A$:

$$x\geq 1 \Rightarrow 3\geq x^3\geq x^2\geq x$$

$\Rightarrow$ $x\leq 3$ οπότε το 3 είναι κάποιο άνω φράγμα για
το σύνολο A. άρα θα $\exists$ και το $\sup A=s$
θ.δ.ο $s^3=3$
Έστω ότι $s^3\neq 3$. Διακρίνω περιπτώσεις:
(I) $s^3<3$
(II) $s^3>3$

(I) Έστω $s^3<3$; θα βρω κάποιο $\varepsilon>0$ ώστε

$$(s+\varepsilon)^3<3 \iff s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon^2+\varepsilon^3<3$$

Αρκεί να βρω $0<\varepsilon\leq 1$: $s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon+\varepsilon<3$

$$\iff 0<\varepsilon<\frac{3-s^3}{1+3s+3s^2}$$

$$s^3+3s^2\varepsilon+3s\varepsilon^2+\varepsilon^3\leq s^3+3s\varepsilon+3s\varepsilon+\varepsilon<3$$

δηλ. το $s+\varepsilon\in A$ θα έπρεπε:

$$s+\varepsilon\leq \sup A$$
$$\varepsilon\leq 0 \text{ άτοπο}$$

(II) Έστω $s^3 > 3$, θα βρω $0 < \varepsilon \leq 1$ ώστε

$$(s-\varepsilon)^3 > 3 \iff s^3 - 3s^2\varepsilon + 3s\varepsilon^2 - \varepsilon^3 > 3$$

επειδή όμως $s^3 - 3s^2\varepsilon + 3s\varepsilon^2 - \varepsilon^3 > s^3 - 3s^2\varepsilon - \varepsilon$
αρκεί να υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε:

$$s^3 - 3s^2\varepsilon - \varepsilon > 3.$$

$$\iff 0 < \varepsilon < \frac{s^3 - 3}{3s^2 - 1} \qquad (\varepsilon \leq 1)$$

Από τον ορισμό του supremum θα υπάρχει για το $\varepsilon > 0$
$\exists x \in A$:

$$s - \varepsilon < x$$
$$\Rightarrow (s-\varepsilon)^3 < x^3$$
$$3 < (s-\varepsilon)^3 < x^3$$
$$x^3 > 3 \Rightarrow x \notin A. \text{ άτοπο}$$

16/10/13

Ασκήσεις

1.) Εάν $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ και $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

Λύση

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon, \ n \geq n_1$ $\Leftarrow$ m άρτιος $m \geq 2n_1$ $|a_m - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad |a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \ n \geq n_2$

Άρα για $N = \max(2n_1, 2n_2 - 1)$ τότε $|a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq N$.
άρα το απέδειξα.

2.) Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

Λύση

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 = n_1(\varepsilon) > 0 : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ n \geq n_1$ (1)

$\exists n_2 = n_2(\varepsilon) > 0 : \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \ n \geq n_2$ (2)

Θ.δ.ο $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \max\{n_1, n_2\} : |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

αθροίζοντας τις (1) και (2) έχω:

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N = \max\{n_1, n_2\}$$

άρα το απέδειξα.

3.) Με εισαγωγή κατάλληλου συνόλου άνω φραγμένου και χρήση του αξιώματος πληρότητας αποδείξτε ότι η εξίσωση:

$$x^2=2$$

έχει θετική (ρίζα) λύση.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι έχω το σύνολο $A=\{x \mid x^2 \le 2\}$
για $x=0$ ή $x=1$ βλέπω ότι είναι μη κενό.
γιατί $0 \in A$.
Και θέλω να αποδείξω ότι $\forall x \in A$, $x \le 2$

α) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 1 \le x \ ,\ x^2 \le 2\}$ τότε $1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$.

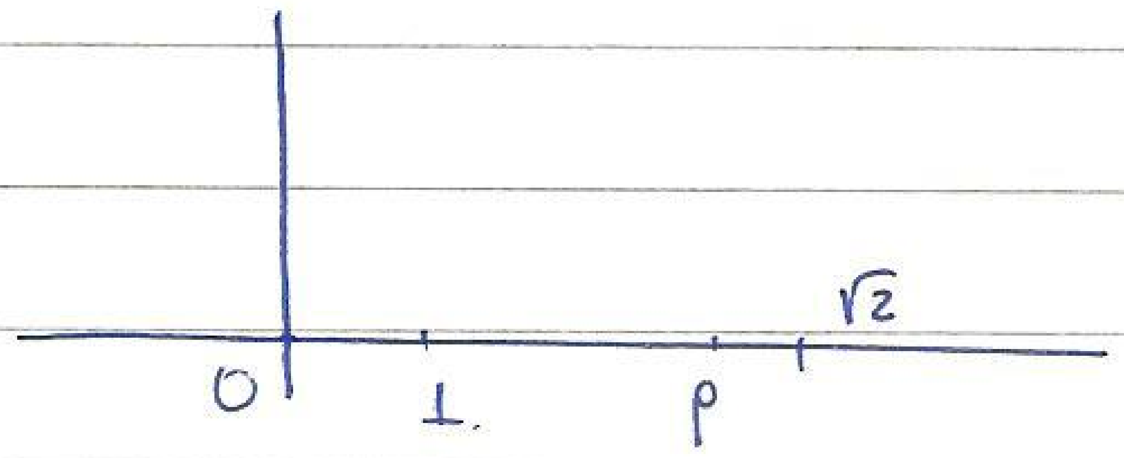
β.) απομένει ν.δ.ο είναι άνω φραγμένο.
$\underset{(\text{πολ/ζω με } x)}{x \geq 1}$, $x>0 \Longrightarrow x^2 \geq x \Longrightarrow x < x^2 \le 2$

$\Longrightarrow x \le 2 \Rightarrow 2$ άνω φράγμα για το A.

[Άλλος τρόπος: $x^2 \le 2 \le 4$
$(x-2)(\underbrace{x+2}_{+}) \le 0$]

Από Αξίωμα Πληρότητας, το A έχει supremum $\rho=\sup A$, θα αποδείξουμε ότι $\rho^2=2$.

Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι $\rho^2 \neq 2$ τότε είτε $\rho^2<2$ είτε $\rho^2>2$



Στόχος είναι να βρω $\varepsilon>0$ κατάλληλα μικρό ώστε $\rho+\varepsilon \in A$ και θα ήθελα να έχω $(\rho+\varepsilon)^2 \le 2$

$\Longrightarrow p^2 + 2p\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 2$

Παίρνω ε να ικανοποιεί την εξίσωση:

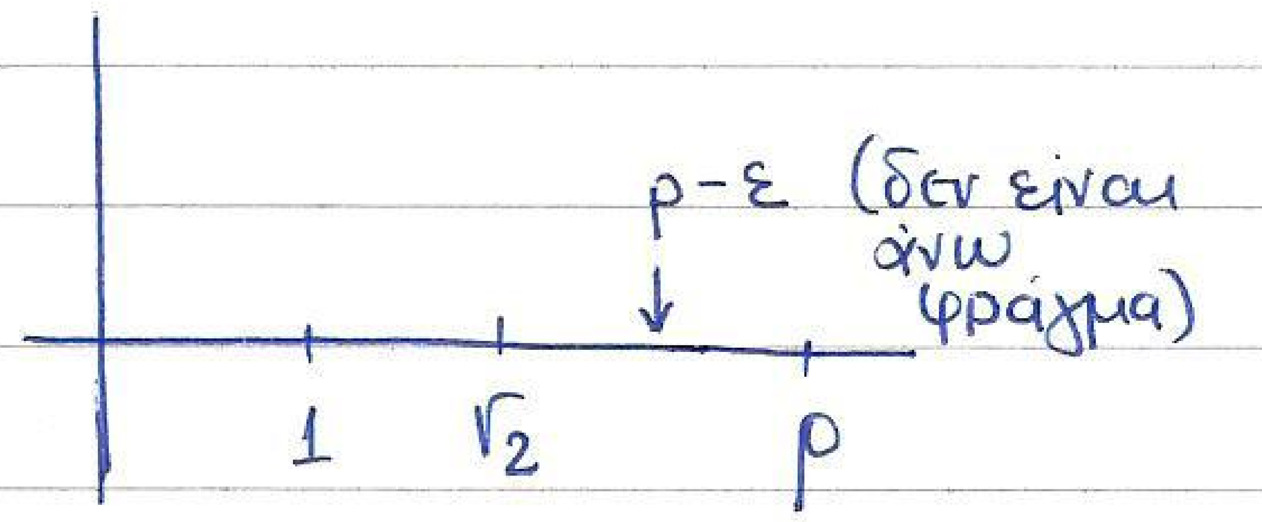
$$p^2 + 2p\varepsilon + \varepsilon \leq 2$$

$$\varepsilon(1+2p) \leq 2-p^2$$

$$\boxed{0 \leq \varepsilon \leq \frac{2-p^2}{1+2p}}$$ γι' αυτήν την επιλογή κατέληξα σε αντίφαση

Άρα $\sup A \geqslant p+\varepsilon$ αντίφαση!

<u>2η περίπτωση:</u> $p^2 > 2$



Το $p-\varepsilon$ δεν είναι το supremum, άρα:
$\exists x \in A$ τ.ω $p-\varepsilon < x < p$.

$$(p-\varepsilon)^2 > 2 \iff p^2 - 2p\varepsilon + \varepsilon^2 > 2$$

$$p^2 - 2p\varepsilon > 2 \iff 2\varepsilon p < p^2 - 2$$

$$0 < \varepsilon < \frac{p^2-2}{2p}$$

Άρα $0 < p-\varepsilon < x \Longrightarrow (p-\varepsilon)^2 < x^2$

$$\Longrightarrow x^2 > 2 \text{ άτοπο!}$$

4.) Βρείτε συνάρτηση $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής αλλά να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τρίτη 22 Οκτωβρίου 2013

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Φυλλάδιο 2)

1). Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπους

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}, \quad x \geq 1,$$

$$g(x) = \frac{x^3+1}{x}, \quad x \geq 1$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμαρφα συνεχής ενώ η συνάρτηση g δεν είναι είναι ομοιόμαρφα συνεχής.

2). Δίνεται η ομοιόμαρφα συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to [1, 2]$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$f^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{f}$$

είναι ομοιόμαρφα συνεχείς.

3). Έστω $A,\ B\ \subset \mathbf{R}$ και οι ομοιόμαρφα συνεχείς συναρτήσεις

$$f : B \to \mathbf{R}, \quad g : A \to B.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f \circ g : A \to \mathbf{R},$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Δώστε εναλλακτική λύση της προηγούμενης άσκησης 2.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1

$f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

α) Ν.δ.ο η $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x \geq 1$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω $\forall\ x, \psi \in [1, +\infty)$

$$|x-\psi| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(\psi)| = \left| \frac{x^2+1}{x} - \frac{\psi^2+1}{\psi} \right| = \left| \frac{\psi(x^2+1) - x(\psi^2+1)}{x\psi} \right| =$$

$$= \left| \frac{x^2\psi + \psi - x\psi^2 - x}{x\psi} \right| = \left| \frac{x\psi(x-\psi) - (x-\psi)}{x\psi} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x-\psi)(x\psi-1)}{x\psi} \right| = \frac{|x-\psi|\,|x\psi-1|}{|x\psi|}$$

Ξέρω ότι $x \geq 1$ και $\psi \geq 1$ άρα $x\psi \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x\psi} \leq 1$
και $x\psi - 1 \geq 0$

Από τριγωνική ανισότητα έχω:

$$|x-\psi| \underbrace{\left| 1 - \frac{1}{x\psi} \right|}_{\geq 0} \leq |x-\psi| \left(1 + \frac{1}{x\psi} \right) \leq |x-\psi| \cdot 2$$

Επιλέγω λοιπόν για $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ και έχω ότι:

$$|x-\psi| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\psi)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

β' τρόπος: Αλλιώς από το Θ.Μ.Τ : $(\exists \xi_n)$

$$|f(x_n)-f(\psi_n)| = |x_n-\psi_n|\,|f'(\xi_n)| \leq |x_n-\psi_n|$$

$$|f'(x)| \leq 1 \quad , \frac{x^2-1}{x} \leq 1$$

β) Ν.δ.ο η $g(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$, $x \geq 1$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. $\hookrightarrow g(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

Μπορώ να επιλέξω ακολουθίες x_n, ψ_n τ.ω
$x_n - y_n \to 0$

Για $x_n=\dfrac{1}{2}\left(n^2+\dfrac{1}{n}+1\right)$ και $\psi_n=\dfrac{1}{2}\left(n^2-\dfrac{1}{n}+1\right) \geq 1$

και $n \geq 2$.

Παρατηρώ ότι : $x_n-\psi_n=\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n \geq 1$
$\psi_n \geq 1$
$x_n+\psi_n \geq 2$
$x_n+\psi_n-1 \geq 1$

ενώ $|f(x_n)-f(\psi_n)| \geq |x_n-\psi_n|\,(\underbrace{x_n+\psi_n-1}_{\geq 1}) = \dfrac{1}{n}n^2 = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Άσκηση 2

$f: \mathbb{R} \to [1,2]$ ομοιόμορφα συνεχής.

α) Ν.δ.ο η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής

Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω $\forall x, \psi \in \mathbb{R}$:

$$|x-\psi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\psi)| < \varepsilon.$$

Η f είναι φραγμένη συνάρτηση άρα $\exists M > 0$ (και στην περίπτωση αυτή $M=2$) τ.ω
↳ είναι φράγμα

$$|f(x)| \leq 2 \quad \forall x.$$

$$|f^2(x) - f^2(\psi)| = |f(x) - f(\psi)|\,|f(x) + f(\psi)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\,(\underbrace{|f(x)| + |f(\psi)|}_{2\ +\ 2})$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$: $|x-\psi| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\psi)| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$|f^2(x) - f^2(\psi)| = |f(x) - f(\psi)|\,|f(x) + f(\psi)| \leq$$

$$\leq 4\,|f(x) - f(\psi)|$$

$$\leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

β) Ν.δ.ο η $\frac{1}{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}\to[1,2]$

Έστω ε>0, αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $\exists\, \delta(\varepsilon)>0$ τ.ω $\forall x,\psi\in\mathbb{R}$.

$$|x-\psi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\psi)|<\varepsilon.$$

Η $|f(x)|\leq 2$ είναι φραγμένη

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(\psi)}\right| = \left|\frac{f(x)-f(\psi)}{f(x)f(\psi)}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)f(\psi)|}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\leq f(x)\leq 2 \\ 1\leq f(\psi)\leq 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\leq f(x)f(\psi)\leq 4 \\ \Rightarrow \underline{1\geq \frac{1}{f(x)f(\psi)}\geq 4} \end{array}$$

$$= |f(x)-f(\psi)| < \varepsilon \quad \left(\text{γιατί } \frac{1}{f(x)f(\psi)}\leq 1\right)$$

Άσκηση 3.

Θέλω ν.δ.ο $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, \delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε:

$$|x-\psi|<\delta \Rightarrow |g(f(x))-g(f(\psi))|<\varepsilon$$

Έστω ε>0.

Επειδή η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists\, \delta_1>0$ τέτοιο ώστε:

$$|u-v|<\underbrace{\delta_1}_{\text{παίζει το ρόλο του ε}} \quad ,\forall u,v\in B$$

$$\Rightarrow |g(u)-g(v)|<\varepsilon.$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Είδαμε ότι: $\delta_1 > 0$ $\exists\, \delta_2 > 0$ τ.ω

$$|x-\psi| < \delta_2 \quad , \forall\, x, \psi \in A.$$

$$\Longrightarrow |f(x)-f(\psi)| < \delta_1$$

Επιλέγω $\delta = \delta_2$ και τότε για $x, \psi \in A$:

$$|x-\psi| < \delta\ (=\delta_2)$$

έχω $f(x), f(\psi) \in B$

$$|f(x)-f(\psi)| < \delta_1$$

βλέπω το $u = f(x)$ και $v = f(\psi)$

επειδή $|u-v| < \delta_1$ (τα u, v απέχουν κατά δ_1)

τότε $|u-v| = |f(x)-f(\psi)| < \delta_2$

$$\Downarrow$$

$$|g(u)-g(v)| = |g(f(x))-g(f(\psi))| < \varepsilon.$$

Τρίτη 29 Οκτωβρίου 2013

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Φυλλάδιο 3)

1). Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$
$$g : [0,1) \to [0,1],$$

τέτοιες ώστε επιπρόσθετα να ισχύει

$$g(t) = \int_0^t f(s, g(s))\, ds, \quad 0 \leq t < 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\exists \lim_{t \to 1^-} g(t).$$

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη. Με χρήση του κριτηρίου Riemann αποδείξτε ότι η συνάρτηση $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

3). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη. Με χρήση του κριτηρίου Riemann αποδείξτε ότι η συνάρτηση f^3 είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Φυλλάδιο 3
Ανάλυση ΙΙ

Άσκηση 1

Έχω $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$g: [0,1) \to [0,1]$ συνεχής

και $$g(t) = \int_0^t f(s, g(s))\,ds \quad , 0 \leq t < 1$$

Ν.δ.ο $\exists \lim\limits_{t \to 1^-} g(t)$.

Λύση

Ξέρω ότι η g είναι συνεχής. Θέλω ν.δ.ο η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω $\forall x, \psi \in [0,1)$:

$$|x - \psi| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(\psi)| < \varepsilon$$

Θα πάω να δω με τι ισούται η διαφορά $|g(x) - g(\psi)|$

$$|g(x) - g(\psi)| = \left| \int_0^x f(s, g(s))\,ds - \int_0^\psi f(s, g(s))\,ds \right| =$$

$$= \left| \int_\psi^x f(s, g(s))\,ds \right| \qquad (\text{για } x > \psi)$$

$$\leq \int_\psi^x |f(s, g(s))|\,ds \quad (*)$$

Η f ορίζεται στο διάστημα $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$.
Η f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα, άρα και ομοιόμορφα συνεχής.

Θέλω να εξασφαλίσω ότι η f είναι φραγμένη, όμως στα διαστήματα αυτά είναι φραγμένη.

$$|f(s,g(s))| \leq M \quad (*)$$

$$\overset{R.\text{ολοκλιρ.}}{\leq} \int_x^\psi |f(s,g(s))|ds$$

$$\leq M(x-\psi) < \varepsilon.$$

Lipschitz συνεχής άρα και ομοιόμορφα συνεχής

Για $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

Οπότε έδειξα ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $(0,1)$. (Το διάστημά μου είναι ανοιχτό άρα τα όρια και συμπεριμένα τα πλευρικά όρια υπάρχουν).

Άσκηση 2

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη.
Ν.δ.ο η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση

Από το Κριτήριο Riemann
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ διαμέριση $P \in \mathcal{P}[0,1]$ τ.ω

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

P = διαμέριση και μάλιστα $P = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1\}$
και θυμάμαι ότι: $M_i(f) = \sup_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x)$ και $m_i(f) = \inf_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x)$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n$

Εμείς θέλουμε $\sum_{i=1}^{n}(M_i(|f|)-m_i(|f|))(t_i-t_{i-1})<\varepsilon$

Τα M_i, m_i προκύπτουν εάν πάρω $|f(x)-f(\psi)|$ και μάλιστα:

$$||f(x)|-|f(\psi)||\leq|f(x)-f(\psi)| \quad \checkmark \quad \forall x,\psi\in[t_{i-1},t_i]$$

$(||x|-|\psi||\leq|x-\psi|)$

$$\Downarrow$$

$$M_i(|f|)-m_i(|f|)\leq M_i(f)-m_i(f)$$

$m_i\leq f(\psi)$
$-f(\psi)\leq -m_i$

Ξέρω ότι $|f(x)-f(\psi)|\leq M_i(f)-m_i(f)$

$$-(M_i(f)-m_i(f))\leq f(x)-f(\psi)\leq M_i(f)-m_i(f)$$
$$\leq M_i(f)-f(\psi)$$
$$\leq M_i-m_i$$

$$||f(x)|-|f(\psi)||\leq|f(x)-f(\psi)|\leq M_i(f)-m_i(f)$$

$$|f(x)|-|f(\psi)|\leq M_i(f)-m_i(f)$$

$$|f(x)|\leq \underbrace{M_i(f)-m_i(f)+|f(\psi)|}_{\text{είναι κάτω φράγμα για την } |f(\psi)|}$$

→ για το τυχαίο ψ.

$$\Longrightarrow M_i(|f|)-m_i(|f|)\leq M_i(f)-m_i(f)$$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$

Επειδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, από το Κριτήριο Riemann θα υπάρχει διαμέριση $P\in\mathcal{P}[0,1]$:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))(t_{i-1}-t_i)<\varepsilon$$

Λόγω Τριγωνικής Ανισότητας :

$$||u|-|v|| \leq |u-v| \quad \text{έχουμε}$$

$$||f(x)|-|f(\psi)|| \leq |f(x)-f(\psi)|$$

οπότε αν $x, \psi \in [t_i, t_{i-1}]$ τότε :

$$|f(x)-f(\psi)| \leq M_i(f)-m_i(f)$$

και επομένως :

$$||f(x)|-|f(\psi)|| \leq M_i(f)-m_i(f)$$

Οπότε:

$$|f(x)|-|f(\psi)| \leq ||f(x)|-|f(\psi)|| \leq M_i(f)-m_i(f)$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq M_i(f)-m_i(f)+|f(y)| \quad \forall x,\psi \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\Rightarrow \quad M_i(|f|) \leq M_i(f)-m_i(f)+|f(\psi)| \quad , \forall \psi \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\underbrace{M_i(|f|)-M_i(f)-m_i(f)}_{\text{κάτω φράγμα για την } |f(\psi)|} \leq |f(y)|$$

$$\Rightarrow \quad M_i(|f|)-(M_i(f)-m_i(f)) \leq m_i(|f|) \Rightarrow$$

$$M_i(|f|)-m_i(|f|) \leq M_i(f)-m_i(f)$$

Τότε όμως: $\quad U(|f|,P)-L(|f|,P) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i(|f|)-m_i(|f|)) \underbrace{(t_i-t_{i-1})}^{+} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i(f)-m_i(f))(t_i-t_{i-1}) < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ Το αντίστροφο του Κριτηρίου Riemann εξασφαλίζει ότι η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 3

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη
Ν.δ.ο και η f^3 είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Λύση

Γνωρίζω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα από το Κριτήριο Riemann $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διαμέριση P [0,1] τ.ω

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

και $$\sum_{i=1}^{k} (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/3M^2$$

Γνωρίζω ακόμα ότι η f είναι φραγμένη, άρα θα υπάρχει κάποιο $M > 0$ τ.ω

$$|f(x)| \leq M$$

Εγώ θέλω $$\sum_{i=1}^{k} (M_i(f^3) - m_i(f^3))(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

Θα πάω να υπολογίσω τη διαφορά:

$$|f^3(x) - f^3(\psi)|$$

$$|f^3(x) - f^3(\psi)| = |f(x) - f(\psi)| \, |f^2(x) + f(x)f(\psi) + f^3(\psi)|$$

επειδή η f είναι φραγμένη:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq M \\ f(\psi) \leq M \end{array}\right\} f(x) \cdot f(\psi) \leq M^2$$

και $f^2(x) \leq M^2$

και $f^2(\psi) \leq M^2$ άρα $f^2(x)+f^2(\psi) \leq 2M^2$
άρα $f^2(x)+f(x)f(\psi)+f^2(\psi) \leq 2M^2+M^2=3M^2$
οπότε:

$$|f^3(x)-f^3(\psi)| = |f(x)-f(\psi)|\,|f^2(x)+f(x)f(\psi)+f^2(\psi)|$$

$$\leq 3M^2 |f(x)-f(\psi)|$$

$$\leq 3M^2 (M_i(f)-m_i(f))$$

Άρα:

$$-3M^2(M_i(f)-m_i(f)) \leq f^3(x)-f^3(\psi) \leq 3M^2(M_i(f)-m_i(f))$$

Οπότε: $f^3(x) \leq \underbrace{f^3(\psi)+3M^2(M_i(f)-m_i(f))}_{\text{αποτελεί άνω φράγμα της } f^3(x)}$

$$f^3(\psi) \geq \underbrace{f^3(x)-3M^2(M_i(f)-m_i(f))}_{\text{αποτελεί κάτω φράγμα της } f^3(\psi)}$$

$$M_i(f^3) \leq f^3(\psi)+3M^2(M_i(f)-m_i(f))$$
$$m_i(f^3) \geq f^3(x)-3M^2(M_i(f)-m_i(f))$$

Άρα $M_i(f^3)-3M^2(M_i(f)-m_i(f)) \leq m_i(f^3) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow M_i(f^3)-m_i(f^3) \leq 3M^2(M_i(f)-m_i(f))$$

Τότε όμως: $U(f^3,P)-L(f^3,P)=$

$$= \sum_{i=1}^{k} (M_i(f^3)-m_i(f^3))\overbrace{(t_i-t_{i-1})}^{+} \leq$$

$$\leq 3M^2 \sum (M_i(f)-m_i(f))(t_i-t_{i-1}) < 3M^2 \frac{\varepsilon}{3M^2}$$

07/11/13

Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες με f', g' Riemann ολοκληρώσιμες. Τότε ισχύει

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\cdot g'(x) + \underbrace{(f\cdot g)}_{f(b)g(b)-f(a)g(a)} \Big|_a^b$$

Απόδειξη

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Επειδή η $f'g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, το ίδιο fg' $\Rightarrow$ $(fg)'$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

$$\int_a^b (f\cdot g)'(x)\, dx = (fg)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b \left(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right) dx = (f\cdot g)\Big|_a^b$$

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\, dx = \int_{\partial\Omega} fg\, \nu_i\, ds \\[2ex] \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g\, dx + \int_\Omega f\, \frac{\partial}{\partial x_i} g\, dx \end{array}\right]$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f:[a,b]\to[m,M]$, $g:[m,M]\to\mathbb{R}$, συνεχής, f παραγωγίσιμη με f' ολοκληρώσιμη και f γνήσια μονότονη. Τότε:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(\psi)\,d\psi = \int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx \qquad \left(\begin{array}{c}\psi=f(x)\\ d\psi=f'(x)dx\end{array}\right)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$G(\psi)=\int_{f(a)}^{y} g(s)\,ds \implies G'(\psi)=g(\psi)$$

$H(x)=G(f(x))$, H παραγωγίσιμη

$$H'(x)=G'(f(x))\,f'(x)$$
$$=g(f(x))\cdot f'(x)\ ,\ x\in[a,b]$$

Η H' είναι ολοκληρώσιμη, διότι f' ολοκληρώσιμη, η $g\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη, $(g\circ f)f'$ είναι ολοκληρώσιμη.

$$\int_a^b H'(x)\,dx = H(b)-H(a) \qquad (2^{o}\ \Theta.\Theta.A.\Lambda)$$

$$=\int_{f(a)}^{f(b)} g(\psi)\,d\psi = 0$$

$$\implies \int_a^b g(f(x))\,f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(\psi)\,d\psi$$

Άσκηση: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη, $n\in\mathbb{N}$

$$a_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx \quad , n\in\mathbb{N}$$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

Απόδειξη

$$|a_n|=\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 x^n|f(x)|dx \leq M\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}$$

όπου $|f(x)|\leq M$

Άσκηση: Βρείτε για ποιες ιδιότητες το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx \quad \text{υπάρχει.}$$

Απόδειξη

[Αν η f ήταν παραγωγίσιμη και f' ολοκληρώσιμη

$$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 (x^{n+1})'\cdot f(x)dx = -\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx + f(1)$$]

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, Riemann ολοκληρώσιμη. Εάν επιπρόσθετα η f είναι συνεχής στο 1 τότε:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$$

$$(n+1)\int_0^1 x^n\,(f(x)-f(1))\,dx=(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx-f(1)\cdot(n+1)\int_0^1 x^n dx$$

$$=(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx-f(1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx \overset{?}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

$$\left[\; x^n\cdot f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ f(1), & x=1 \end{cases} \;\right]$$

Θα βγάλουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx=0$

Α. Τερτίκας

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

(Φυλλάδιο 4)

1). α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$, η οποία επιπρόσθετα ικανοποιεί

$$\int_0^1 f(s)\; ds \;= 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$f(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

β) Ποιές είναι οι αύξουσες συναρτήσεις $g : [0,1] \to [0,+\infty)$, που επιπρόσθετα ικανοποιούν

$$\int_0^1 g(s)\; ds \;= 0.$$

2). Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη που είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$e^f + f$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη επίσης.

3). Δίνεται η Lipschitz συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με σταθερά $L > 0$, δηλ. η f ικανοποιεί

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in [0,1].$$

Αποδείξτε την ανισότητα

$$|\int_0^1 f(x)\; dx \;- \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})| \leq \frac{L}{2n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Πως γίνεται η εκτίμηση στην περίπτωση που η f είναι Holder συνεχής με εκθέτη $\alpha \in (0,1)$, δηλ. ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in [0,1]?$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Φυλλάδιο 4

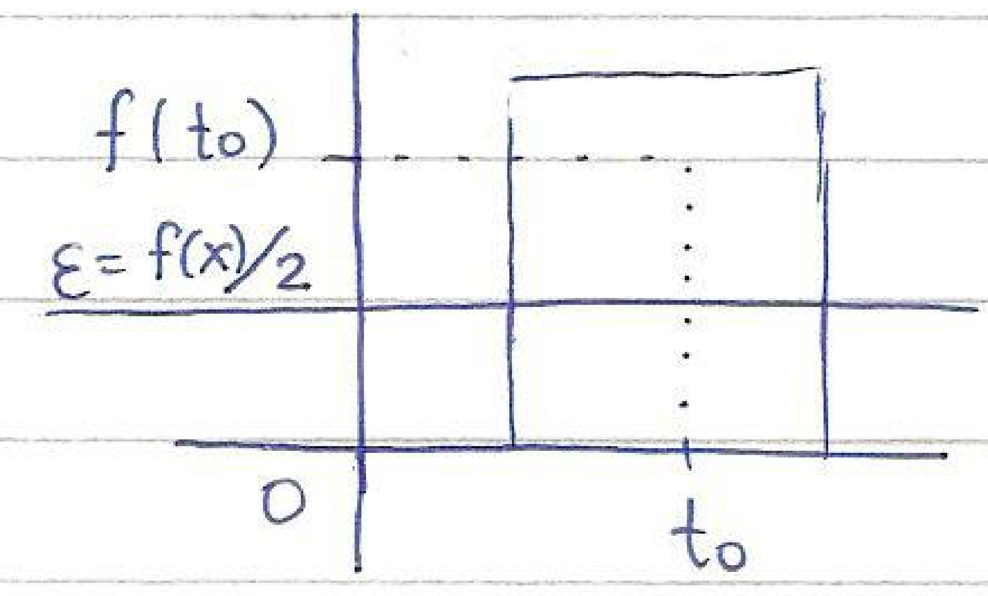
Άσκηση 1

a.) $f: [0,1] \to [0,+\infty)$ και $\int_0^1 f(s)\,ds = 0$

Ν.δ.ο $\quad f(s) = 0 \quad , s \in [0,1]$

α' τρόπος: (ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ)

Έστω $f \not\equiv 0 \implies \exists\ t_0 \in [0,1] : f(t_0) > 0$



Η f είναι συνεχής στο t_0 άρα:

$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists\ \delta > 0 : \forall\ t \in [0,1]$ και $|t - t_0| < \delta$

$$\implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{f(t_0)}{2} > 0$

άρα $\exists\ \delta > 0 : \forall\ |t - t_0| < \delta \iff t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{f(t_0)}{2} \iff$$

$$-\frac{f(t_0)}{2} < f(t) - f(t_0) < \frac{f(t_0)}{2} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(t_0)}{2} < f(t) < \frac{3f(t_0)}{2}, \quad 0 < t_0 - \frac{\delta}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{\delta}{2}$$

Άρα : $$\frac{1}{2}\int_{t_0-\frac{\delta}{2}}^{t_0+\delta/2} f(t_0)\,dt \leq \int_{t_0-\delta/2}^{t_0+\delta/2} f(t)\,dt$$

$f(t_0) \leq 0$

$$0 < \frac{\delta}{2} f(t_0) \leq \int_{t_0-\frac{\delta}{2}}^{t_0+\frac{\delta}{2}} f(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\delta}{2} f(t_0) \leq \underbrace{\int_0^{t_0+\delta/2} f + \int_{t+\delta/2}^{1} f}_{\eta \int_0^1 f = 0}$$ ΑΝΤΙΦΑΣΗ.

β' τρόπος:

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1]$$

Επειδή η f είναι συνεχής $\Longrightarrow$ F είναι παραγωγίσιμη

$$F'(x) = f(x) \geq 0 \Longrightarrow F \text{ αύξουσα}$$

$$F(0) \leq F(x) \leq F(1)$$

$$0 \leq F(x) \leq 0 \Longrightarrow F \equiv 0$$

Άρα $F'(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$

γ' τρόπος:

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \Longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt + \underbrace{\int_x^1 \overset{\geq 0}{f(t)}\,dt}_{\geq 0}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{δηλ. } a+\beta=0 \\ \left.\begin{array}{l} a\geq 0 \\ \beta\geq 0 \end{array}\right\} a=\beta=0 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow F(x)\equiv 0$ όμως F συνεχής άρα

$$\Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

β.) $g:[0,1]\longrightarrow[0,+\infty)$

Θέλω τις αύξουσες συναρτήσεις g που ικανοποιούν

$$\int_0^1 g(s)\,ds = 0$$

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 &, \ 0\leq x<1 \\ a &, \ x=1 \end{cases}$$ για κάποια τιμή του $a\geq 0$

(η τιμή του ολοκληρώματος δεν αλλάζει αν αλλάξω την τιμή της συνάρτησης)

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $x_0\in[0,1) : g(x_0)>0$

Άρα $\forall \quad 0\leq x_0\leq t\leq 1$ τότε

$$g(x_0)\leq g(t)$$

(το t έχει όριο το x_0 και το 1)

Άρα $\displaystyle\int_{x_0}^{1} g(x_0)\,dt \leq \int_{x_0}^{1} g(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{1} g \geq \underbrace{g(x_0)}_{>0}\underbrace{(1-x_0)}_{>0} > 0$$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 g = \int_0^{x_0} g + \int_{x_0}^{1} g > 0$ επειδή η g είναι μη αρνητική συνάρτηση.

Άτοπο!

Άσκηση 2.

η $F = e^f + f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα από το Κριτήριο Riemann:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ διαμέριση P τ.ω

$$\sum (M_i(F) - m_i(F))$$

α' τρόπος:

θέλω να δω τη διαφορά $M_i(f) - m_i(f)$ και να δω τι σχέση έχει:

$$|f(x) - f(\psi)| \text{ με το } (|F(x) - F(\psi)|)$$

θέλω $|f(x) - f(\psi)| \leq (|F(x) - F(\psi)|)$

$$F(x) = e^{f(x)} + f(x) \quad , x \in [0,1]$$

θέτω $f(x)=y$ $\quad g(\psi) = e^{\psi} + \psi \quad , \psi \in \mathbb{R}$

$F(x) = g(f(x)) \implies g^{-1} \circ F = f$

θέλω να δω αν ορίζεται η αντίστροφη της g

$g'(\psi) = e^{\psi} + 1 > 0$ (άρα η g είναι γν. αύξουσα συνεχής)

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

($\lim_{\psi \to -\infty} g(\psi) = -\infty$ και $\lim_{\psi \to +\infty} g(\psi) = +\infty$ για να δω πως ορίζεται η αντίστροφη της g)

Η $f(x)$ εκφράζεται με την αντίστροφη συνάρτηση:

$$f(x) = g^{-1}(F(x))$$

↳ είναι ομαλή γιατί και η $F(x)$ είναι ομαλή.

Άρα πάω να δω τη διαφορά:

$$|f(x) - f(\psi)| = |g^{-1}(F(x)) - g^{-1}(F(\psi))| \leq |F(x) - F(\psi)| \tilde{M}$$

Για την g^{-1} θέλω να εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ. γιατί από αυτό θα δω τη διαφορά $F(x) - F(\psi)$

Το Θ.Μ.Τ λέει : $g^{-1}(a) - g^{-1}(b) = (a-b)(g^{-1})'(\xi)$

$g^{-1}(g(x)) = x$

$(g^{-1})'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$

$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$

$(g^{-1})'(\psi) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\psi))}$

θέλω να δω πού βρίσκεται η F.

$e^{-M} - M \leq F \leq$

$|f(x) - f(\psi)| \leq \tilde{M} \, |F(x) - F(\psi)|$

$M_i(f) - m_i(f) \leq \tilde{M} \, (M_i(F) - m_i(F))$

<u>β' τρόπος:</u>

Η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη και

$$\underbrace{g^{-1}}_{\text{συνεχής}} \circ \underbrace{F}_{\text{Riemann ολοκληρώσιμη}} = f$$

Από το Θεώρημα της σύνθεσης, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη

Γνωρίζω ότι η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη και θέλω να εξασφαλίσω ότι η g^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση.

$g^{-1}(g(x)) = x$

$g^{-1}(g(\psi)) = \psi$

και από τον ορισμό της συνέχειας θέλουμε:

$$g^{-1}(t) - g^{-1}(s)$$

Η g είναι συνεχής γιατί:

$g(\psi) = e^{\psi} + \psi$ είναι άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

$|g(x) - g(\psi)| = |x-\psi|\,|g'(\xi)|$ όπου ξ είναι ενδιάμεσο σημείο στο διάστημα $[x, y]$

$\xi \in [x, \psi]$

$g'(\xi)$ είναι αύξουσα άρα $g'(x) \leq g'(\xi) \leq g'(\psi)$

$g''(\xi) = e^{\psi} > 0$

Οπότε:

$$|g(x)-g(\psi)| = |x-\psi|\,g'(\xi) \geqslant |x-\psi|\,g'(x)$$

Άρα: $|g(g^{-1}(t))-g(g^{-1}(s))| \geqslant |g^{-1}(t)-g^{-1}(s)|\,g'(g^{-1}(t))$

$$|g^{-1}(t)-g^{-1}(s)| \leq \frac{1}{g'(g^{-1}(t))}\cdot|t-s|$$

Άρα $\delta = \varepsilon\, g'(g^{-1}(t))$

* ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ ΑΠΟ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΙΙ

$F(x,y)=0$ και ξέρω ότι $F \in C^1$

$$\left.\begin{array}{l} F(x_0,y_0)=0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\psi_0)\neq 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{l} \exists\ \delta>0,\ \exists y=\psi(x) : \psi\in C^1 \\ \qquad (x_0-\delta,\ x_0+\delta) \\ F(x,\psi(x))=0 \\ \quad \forall\ x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \end{array}$$

$$F(x,\psi) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Είναι παραγωγίσιμη}}}{g(\psi)} - x$$

Άσκηση 3.

Έχω Lipschitz συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

Πότε $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f$? (1)

Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε ισχύει πάντα η (1), από τα αθροίσματα Darboux.

Αν $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=l$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη?

Όχι, π.χ η συνάρτηση του Dirichlet.

Θέλω ν.δ.ο

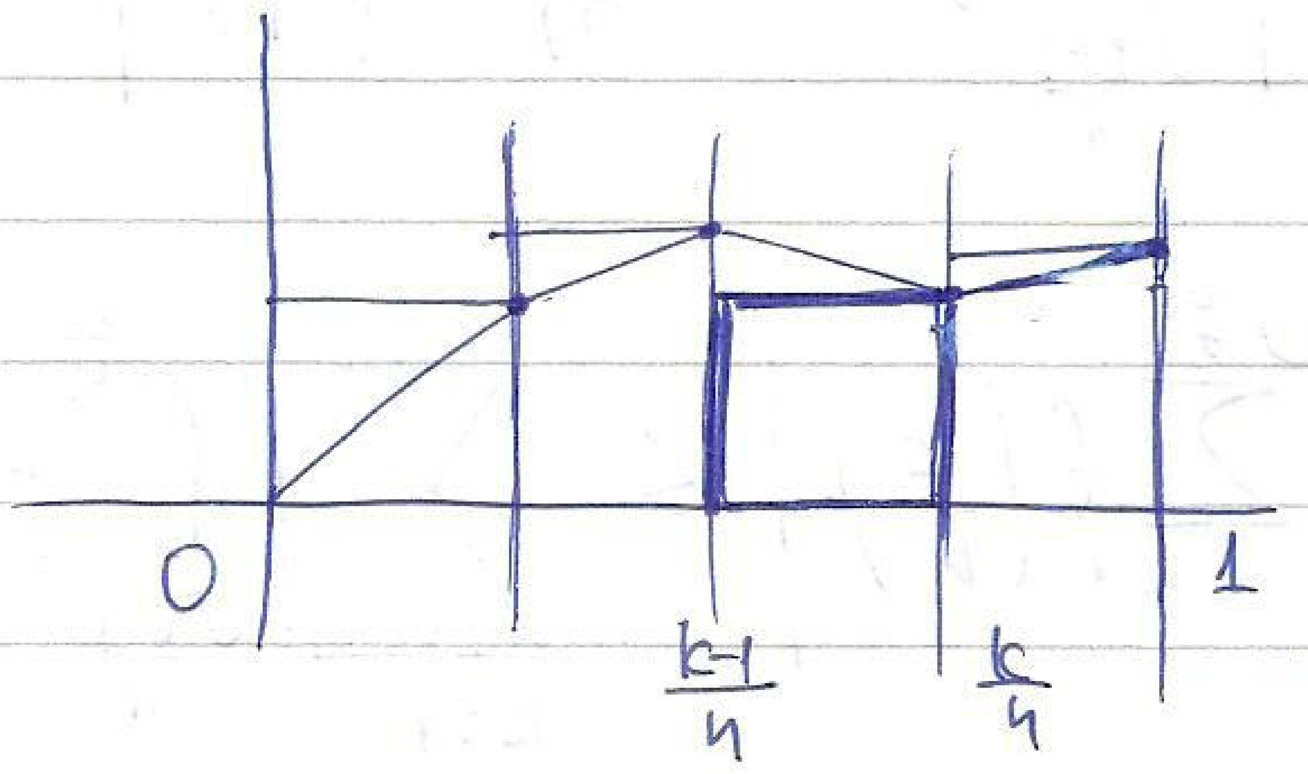
$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq \frac{L}{2n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Η f είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,1]\to\mathbb{R}$ με σταθερά $L>0$ δηλαδή:

$$|f(x)-f(\psi)|\leq L|x-\psi|,\quad x,\psi\in[0,1]$$

Lipschitz συνεχής είναι και ομοιόμορφα συνεχής

Σπάω το διάστημα $[0,1]$ σε n-ίσα κομμάτια



Άρα: $\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{k}\right) \right|$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx =$$

$$= \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \quad (*)$$

Όμως: $|f(x) - f(\psi)| \leq L|x-\psi|$

θέτω $\psi = \frac{k}{n}$

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq L \left| x - \frac{k}{n} \right| = L\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

$$(*) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} L\left(\frac{k}{n} - x\right) dx \quad , x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$$

$$\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \right) \Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$$

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{L}{2n^2}$$

Έτσι έχω:

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{nL}{2n^2} = \frac{L}{2n}$$

18.12.2013

Εργαστήριο

Φυλλάδιο 6

Άσκηση 1 (α)

(*) Αν $\exists \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{a^y}$, $a>1$, τότε από De L'Hospital

$\frac{y}{a^y} \to 0$, $y\to+\infty$.

$g_n(x) = nx(1-x)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} nx(1-x)^n = x\lim_{n\to+\infty} n(1-x)^n = x\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n}$$

όπου $a = \frac{1}{1-x}$ και $x\neq 1$ και $x\neq 0$

$$0\le x\le 1 \Rightarrow 0>-x>-1 \Rightarrow 1>1-x>0 \Rightarrow 1<\frac{1}{1-x} = a.$$

Άρα $\boxed{a>1}$

Έπεται το συμπέρασμα λοιπόν από την (*) για το κατά σημείο όριο της g_n.

Μελέτη της g_n:

$$g_n'(x) = n(1-x)^{n-1}\left[1-(1+n)x\right]$$

- $1-(1+n)x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow g_n'(x)>0$ για $0\le x<\frac{1}{n+1}$
- $1-(1+n)x<0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow g_n'(x)<0$ για $\frac{1}{n+1}<x\le 1$.

Άρα $g_n \uparrow$ στο $[0, \frac{1}{n+1})$ και $g_n \downarrow$ στο $(\frac{1}{n+1}, 1]$

Δηλαδή στο $x = \frac{1}{n+1}$ η g_n παίρνει μέγιστη τιμή, η οποία είναι

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Επομένως $\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(β) $g_n \xrightarrow[\text{σημείο}]{\text{κατά}} g$, όπου $g \equiv 0$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$$ Θέτω $1-x=u$, $-dx = du$

οπότε $n\int_0^1 (1-u)u^n\,du = n\int_0^1 (u^n - u^{n+1})\,du$

$$= \left[n\frac{u^{n+1}}{n+1} - n\frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2}$$

Οπότε $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2}\right) = 0$

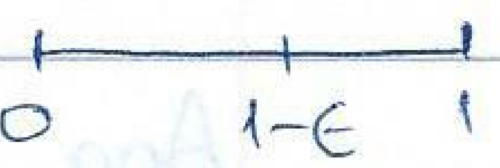
Τελικά $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$.

Άσκηση 2:

Από ορισμό συνέχειας της f στο 0:

$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \ 0<x<\delta : |f(x)-f(0)|<\varepsilon$

Θέλω $x^n<\delta$ για όλα τα $x\in[0,1-\epsilon]\subset[0,1]$.



Οπότε $n\ln x<\ln\delta \Leftrightarrow n>\frac{\ln\delta}{\ln x}\geq\frac{\ln\delta}{\ln(1-\epsilon)}$

Τότε $|f(x^n)-f(0)|<\varepsilon, \ n\geq n_0, \ x\in[0,1-\epsilon]$.

$-\epsilon<f(x^n)-f(0)<\varepsilon \Rightarrow -\epsilon+f(0)<f(x^n)<\epsilon+f(0)$

Ολοκληρώνοντας:

$$\int_0^{1-\epsilon}(-\epsilon+f(0))\,dx<\int_0^{1-\epsilon}f(x^n)\,dx<\int_0^{1-\epsilon}(\epsilon+f(0))\,dx$$

$\cdot \left|\int_{1-\epsilon}^1 f(x^n)\,dx\right| \leq \int_{1-\epsilon}^1 |f(x^n)|\,dx \leq M\varepsilon$.

19.12.2013

Φυλλάδιο 7

Άσκηση 1 (α)

$$|g_n(x)-g_m(x)| = \left|\int_0^1 (x+t)^{3/2} f_n(t)\,dt - \int_0^1 (x+t)^{3/2} f_m(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 (x+t)^{3/2}|f_n-f_m|\,dt \leq \int_0^1 (x+t)^{3/2}\|f_n-f_m\|\,dt$$

$$\leq \|f_n-f_m\|\int_0^1 (1+t)^{3/2}\,dt \quad , x\in[0,1].$$

Άρα $\|g_n(x)-g_m(x)\| \leq k\,\|f_n-f_m\|$

Επίσης η ακολουθία g_n είναι ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει ομοιόμορφα, $n\to+\infty$.

(β) $$\frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h} \overset{h\neq 0}{=} \int_0^1 \frac{(x+h+t)^{3/2}-(x+t)^{3/2}}{h} f_n(t)\,dt$$

$$\left|\frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h} - \frac{3}{2}\int_0^1 (x+t)^{3/2} f_n(t)\,dt\right| =$$

$$\left|\int_0^1\left(\frac{(x+h+t)^{3/2}-(x+t)^{3/2}}{h}-\frac{3}{2}(x+t)^{1/2}\right)f_n(t)\,dt\right| \leq$$

$$\boxed{\int_0^1\left|\frac{(x+h+t)^{3/2}-(x+t)^{3/2}}{h}-\frac{3}{2}(x+t)^{1/2}\right||f_n(t)|\,dt} \quad (**)$$

$$\frac{(x+h+t)^{3/2}-(x+t)^{3/2}-\frac{3}{2}h(x+t)^{3/2}}{h} = \frac{(x+t+h)^{3/2}-(x+t)^{3/2}\left(1+\frac{3}{2}h\right)}{h}$$

- $A^{3/2}-B^{3/2} = (A^{1/2})^3-(B^{1/2})^3 = (\sqrt{A}-\sqrt{B})(A+\sqrt{AB}+B)$

$$\frac{(x+h+t)^{3/2}-(x+t)^{3/2}}{h} = \overset{1}{\frac{(x+t+h-(x+t))}{h}} \cdot \overset{(*)}{\boxed{\frac{x+t+h+\sqrt{(x+t+h)(x+t)}+x+t}{\sqrt{x+t+h}+\sqrt{x+t}}}}$$

$$\frac{(x+t+h)^{3/2}-(x+t)^{3/2}}{h} - \frac{3}{2}(x+t)^{1/2} =$$

$$= (*) - \frac{3}{2}(x+t)^{1/2} = \frac{x+t+h+\sqrt{(x+t+h)(x+t)} - \frac{3}{2}(x+t) - \frac{3}{2}\sqrt{(x+t)(x+t+h)}}{(x+t+h)^{1/2}+(x+t)^{1/2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x+t)+h-\frac{1}{2}\sqrt{(x+t)(x+t+h)}}{(x+t+h)^{1/2}+(x+t)^{1/2}}$$, Θέτω $A = x+t+h$
$B = x+t$

Οπότε $\left|\frac{A-\frac{1}{2}A^{1/2}B^{1/2}-B/2}{A^{1/2}+B^{1/2}}\right| \leq \left|\frac{\frac{A}{2}-\frac{1}{2}A^{1/2}B^{1/2}}{A^{1/2}+B^{1/2}}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{A-B}{A^{1/2}+B^{1/2}}\right|$

$$\leq \frac{A^{1/2}}{2}\left|\frac{A^{1/2}-B^{1/2}}{A^{1/2}+B^{1/2}}\right| + \frac{1}{2}|A^{1/2}-B^{1/2}| \leq \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)|A^{1/2}-B^{1/2}|$$

$$= \frac{3}{4}\left|(x+t+h)^{1/2}-(x+t)^{1/2}\right| \longrightarrow 0, \text{ καθώς } h \to 0$$

• Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο $[0, A]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |x-y| < \delta \ \ |\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \varepsilon$.

Αυτό που έχει σημασία είναι το h να'ναι μικρο.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ ώστε $0 < |h| < \delta$, τοτε $\frac{3}{2}\left|(x+t+h)^{1/2}-(x+t)^{1/2}\right| \leq k\varepsilon$

Οπότε $(**) \leq M\int_0^1 k\varepsilon \, dt$.

Οπότε $g_n'(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x+t)^{1/2} f_n(t)\,dt$

Περιμένουμε $g_n'(x) - g(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x+t)^{3/2}(f_n(t)-f(t))\,dt$

$\leq \frac{3}{2}\int_0^1 (1+t)^{3/2}\,dt\ \|f_n - f\|$

Άσκηση 1: Έστω $f_n, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε f_n παραγωγίσιμες

Τότε:

(i) $|f_n'(x)| \leq 1$

(ii) $f_n \to f$ ομοιόμορφα, $n \to +\infty$

Ν.δ.ο η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

Άσκηση 2: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f' ομοιόμορφα συνεχή.

Ν.δ.ο

$$n\left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right) \to f'(x) \text{ ομοιόμορφα, } n \to +\infty$$

Άσκηση 3: Υπάρχει $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με:

(i) $\int_0^1 x\, g(x)\,dx = 1$ και

(ii) $\int_0^1 x^m g(x)\,dx = 0 \quad \forall m = 0, 2, 3, \ldots$;

15.1.2014

Εργαστήριο

Φυλλάδιο 7

Άσκηση 3 (γ) Έστω η συνεχής συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία επιπρόσθετα ισχύει

$$\int_0^1 x^{2m-1} h(x)\,dx = 0, \quad m=1,2,\ldots$$

Αποδείξτε ότι $h\equiv 0$.

Λύση

Θέτουμε $y=x^2$ (η οποία είναι παραγωγίσιμη και 1-1 στο $[0,1]$) τότε $dy=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$

Έτσι παίρνουμε $\frac{1}{2}\int_0^1 y^m h(\sqrt{y})\,dy=0, \quad m=1,2,3,\ldots$

$\Leftrightarrow \int_0^1 y^m h(\sqrt{y})\,dy=0, \quad m=1,2,3,\ldots$

Θέτουμε $g(y)=y\,h(\sqrt{y})$ και τότε

$$\int_0^1 y^n g(y)\,dy=0, \text{ για } n=0,1,2,3,\ldots$$

Και από το (α), έχουμε $g(y)\equiv 0$. Ισοδύναμα $y\,h(\sqrt{y})\equiv 0$
Ισοδύναμα $x^2 h(x)\equiv 0$. Και εφ' όσον η h είναι συνεχής έπεται ότι $h(x)\equiv 0$. $\forall x\in[0,1]$

Φυλλάδιο 8

Άσκηση 1 : Η ιδέα κρύβεται στο παρακάτω Θεώρημα

Θεώρημα : f_n συνεχείς στο x_0, $f_n \to f$ ομοιόμορφα, $n \to +\infty$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο x_0.

Ζητείται : f συνεχής στο x_0.
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > : |x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Δεδομένα: $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : \|f_n - f\| < \varepsilon \;, n \geq n_0$
f_n συνεχείς στο x_0
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, n) \; : |x - x_0| < \delta$ τότε $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$

Απόδειξη

Έστω $\epsilon > 0$, επειδή $f_n \to f$ ομοιόμορφα, $n \to +\infty$
$\exists n_0 = n_0(\epsilon) : \|f_n - f\| < \varepsilon, n \geq n_0$

$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f(x_0)|$
$\leq |f(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f(x_0)|$

Για την επιλογή του n_0, έχουμε $\|f_{n_0} - f\| < \varepsilon$.
Η f_{n_0} όμως είναι συνεχής στο x_0, οπότε
$\exists \delta(\epsilon) > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$

Επομένως $|f(x) - f(x_0)| < \|f_{n_0} - f\| + \varepsilon + \|f_{n_0} - f\| = 3\epsilon$

!!! Πάντοτε στην ομοιόμορφη σύγκλιση, επιλέγουμε n_0