26/09/23

Μια συνήθης διαφορική εξίσωση είναι της μορφής

$$F(\underbrace{y(t)}_{x}, \underbrace{y'(t)}_{y}, \underbrace{t}_{z})=0 \quad 1^{ης} \text{ τάξης}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \not\equiv 0$$

Εφαρμόζεται στις φυσικές επιστήμες, στην μοντελοποίηση ... (έχουμε ρυθμό μεταβολής).

Πιο "απλή" δ.ε:
$$y'(t)=0, \quad t>t_0$$
$$y(t_0)=y_0$$

Τι σημαίνει έχω λύση στην δ.ε;
Πόσο καλή πρέπει να είναι η συνάρτηση;

Πρέπει, $y:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$, διαφορίσιμη $\forall\, t>t_0$ και συνεχής στο διάστημα $[t_0,+\infty)$.

Η συνάρτηση μας $y \in \overset{\text{συνεχής}}{C}[t_0,+\infty) \cap \overset{\text{παραγωγίσιμη}}{D}(t_0,+\infty)$ και επιπρόσθετα λύνει την δ.ε για $t>t_0$

$$y'(t)=0, \quad t>t_0$$
και $$y(t_0)=y_0, \quad \text{αρχικές συνθήκες}$$

• Επειδή $y'(t)=0$, $t>t_0$

$$\Rightarrow y(t)=y(t_1), \quad t>t_1>t_0$$

Θ.Μ.Τ: $[t_1,t]$, $y\in C[t_1,t]$ και παραγωγίσιμη στο (t_1,t).

$$\Rightarrow \exists\ \xi \in (t_1, t) : y(t) - y(t_1) = (t - t_1)\cancel{y'(\xi)}^{\,0}$$

$$y(t) = y(t_1),\ t \in (t_0, +\infty).$$

Επειδή είναι συνεχής στο t_0, θα πρέπει

$$\lim_{t \to t_0^+} y(t) = y_0 = y(t_1)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 \quad , t \geq t_0$$

■

- Δεδομένα: $y'(t) = y(t) \quad , t > 0$
  $y(0) = y_0$

όπου $y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δοθείσα συνάρτηση.

Η $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ πρέπει : $y \in D(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$ και να ικανοποιείται η Δ.Ε και η αρχική συνθήκη.

Ποιές είναι οι υποθέσεις της g;
Απαραίτητο, η g να είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, T]$, $\forall\, T > 0$. (δεν είναι απαραίτητο αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη η παράγωγος να είναι ολοκληρώσιμη).

$$y(t) = y_0 + \int_0^t g(s)\, ds \quad \leftarrow \text{υποψήφια λύση.}$$

Θ.Α.Λ:

1) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμέν συνάρτηση και Riemman ολοκληρώσιμη.

Τότε $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

Riemman ολ/ση συνάρτηση:
1) συνεχής
2) κατα τμήματα
3) μονότομ

$x\in[\alpha,\beta]$ είναι καλά ορισμένη και μάλιστα είναι Lipschitz συνεχής δηλαδή $\exists\, M>0$:

$$|F(x)-F(y)|\leqslant M|x-y|$$

$\forall\, x,y\in[\alpha,\beta]$.

Το $M=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|$ επειδή είναι φραγμέν.

(Η F δεν είναι απαραίτητο σε όλα τα σημεία παραγωγίσιμη)

2) Αν, επιπρόσθετα $x_1\in[\alpha,\beta]$ τ.ω η f είναι συνεχής στο x_1 τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_1 και μάλιστα $F'(x_1)=f(x_1)$.

Οπότε, στο παράδειγμα πίσω, η $g:(0,+\infty)\Rightarrow\mathbb{R}$, η $g\in C(0,+\infty)$ φραγμένη στο $[\alpha,M]$ $\forall\, M>0,(\alpha>0)$, ολοκληρώσιμη υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της g στο 0, δηλ.

$$\int_0^x g(t)\,dt := \lim_{y\to 0^+}\int_y^x g(t)\,dt$$

Λύση: $y(t)=y_0+\int_0^t g(s)\,ds$

είναι $y\in C[0,+\infty)\cap D^{0}(0,+\infty)$.

Πρόβλημα:
Να λυθεί το Π.Α.Τ

$$y'(t)=y(t)(1-y(t)),\ t>0$$
$$y(0)=c$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $c\in\mathbb{R}$.

Λύση:

Εντάσσεται στην κατηγορία χωριζομένων μεταβλητών

$y'(t)+\alpha(t)y(t)=\beta(t)$ γραμμική $1^{ης}$ τάξης δ.ε

Για να την λύσουμε πρέπει να βρούμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα Euler

$$y'(t)+\alpha(t)y(t)=\beta(t)$$
$$\sigma(t)\left(y'(t)+\alpha(t)y(t)\right)=\beta(t)\sigma(t)$$

$$\sigma(t)y'(t)+\sigma(t)\alpha(t)y(t)=\beta(t)\sigma(t)$$
$$\left(h(t)y(t)\right)'=h(t)y'(t)+h'(t)y(t)$$

Εδώ επιλέγω την $h(t)=\sigma(t)$ ώστε να ικανοποιείται η σχέση οπότε έχω:

$$\left(\sigma(t)y(t)\right)'=\sigma(t)y'(t)+\sigma'(t)y(t)$$

Το σ το επιλέγουμε ώστε:

$$\sigma'(t)=\sigma(t)\alpha(t)$$

Εδώ θέλουμε 1 βολική σ που να κάνει αυτή τη δουλειά.

$$\sigma'(t)=\sigma(t)\alpha(t)$$

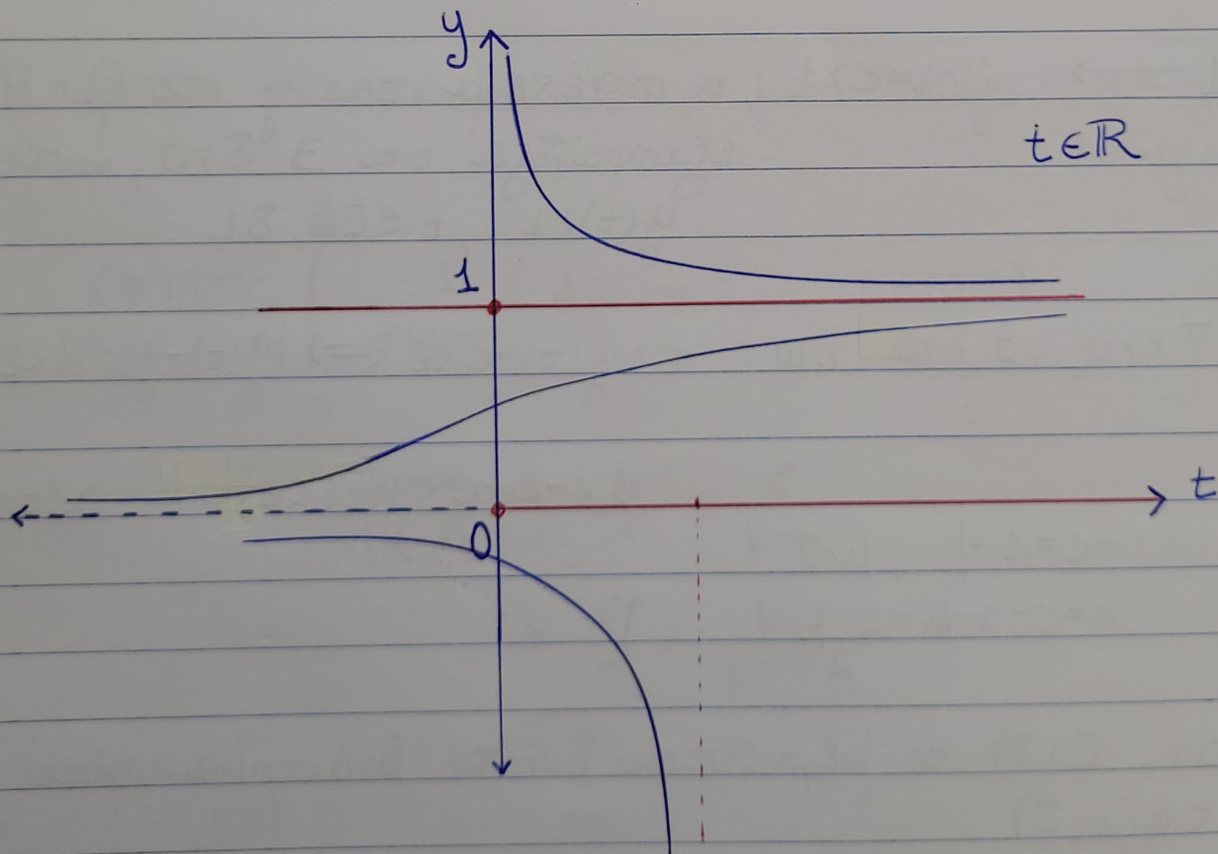
$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}=\alpha(t)$$

$$(\ln(\sigma(t))'=\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)'$$

$$\Rightarrow \ln(\sigma(t))=\int_0^t \alpha(s)ds$$

$$\Rightarrow \sigma(t)=e^{\int_0^t \alpha(s)ds}$$

Οπότε στο πρόβλημα μας
Υπάρχουν 2 ειδικές τιμές οι 0,1 που παίζουν σημαντικό ρόλο στο πως εξελίσσεται το πρόβλημα.



Διακρίνω τις περιπτώσεις:

i) $c=0 \longrightarrow y(t)\equiv 0$, $t\geq 0$ μία λύση του προβλήματος

ii) $c=1 \longrightarrow y(t)\equiv 1$, $t\geq 0$ μία λύση του προβλήματος

Τώρα πρέπει να διακρίνουμε που βρίσκεται το c.

28/09/23

$$\begin{cases} y'(t)=y(t)(1-y(t)) \\ y(0)=c \end{cases}$$

Ερώτημα:
Ισχύει το μονοσύνολο των λύσεων;

Οπότε,

iii) $c>1 \longrightarrow y(0)=c>1$, η συνέχεια της y στο 0, εξασφαλίζει ότι $\exists\ \delta>0$, ώστε $y(t)>1$, $t\in[0,\delta)$.

($\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ τ.ω $-\varepsilon<y(t)-c<\varepsilon \iff |y(t)-y(0)|<\varepsilon$

$1<-\varepsilon+c<y(t)<\varepsilon+c$, $0\leq t\leq\delta$

$-\varepsilon+c=1+\mu$, $\mu>0$

$\varepsilon=c-1-\mu=\frac{c-1}{2}$)

Έστω $[0,\delta)$ το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα ώστε $y(t)>1$ $\forall\ t\in[0,\delta)$.

Τότε, όμως, επειδή $y'(t)=y(t)(1-y(t))$, $t\in(0,\delta)$

$\Rightarrow y \downarrow$ στο $[0,\delta)$, και

Επομένως,

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = 1 \quad , \quad t \in (0,\delta)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)(1-y(s))} ds \qquad (*)$$

$$= \int_0^t 1 ds = t$$

- $$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx \overset{z=g(x)}{=\!=\!=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz}$$

Μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής: $x = y(t)$
$dx = y'(t)dt$

$$(*) \Leftrightarrow \int_0^{y(t)} \frac{1}{x(1-x)} dx = t, \qquad t \in (0,\delta)$$

$$\frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Οπότε,

$$\int_c^{y(t)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx = t \Leftrightarrow \left(\ln x - \ln(x-1)\right)\Big|_c^{y(t)} = t.$$

Συνεπώς,

$$\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)\Bigg|_{c}^{y(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{y(t)-1}\right) - \ln\left(\frac{c}{c-1}\right) = t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{y(t)}{y(t)-1}}{\frac{c}{c-1}}\right) = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{y(t)}{y(t)-1}}{\frac{c}{c-1}} = e^{t} \quad , t \in [0, \delta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(t)}{y(t)-1} = \frac{ce^{t}}{c-1} \quad , t \in [0, \delta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(t)}{y(t)-(y(t)-1)} = \frac{\frac{ce^{t}}{c-1}}{\frac{ce^{t}}{c-1} - 1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{ce^{t}}{ce^{t}-(c-1)} = \frac{ce^{t}}{c(e^{t}-1)+1} \quad , t \in [0, \delta).$$

Επομένως,

Λύση: $y(t) = \dfrac{ce^{t}}{c(e^{t}-1)+1} \quad , \forall t \in [0, +\infty).$

iv) $0<c<1 \longrightarrow \exists\ \delta'>0$ (απο τη συνέχεια της y στο 0) ώστε $0<y(t)<1$, $t\in[0,\delta')$.

Έστω $[0,\delta')$, το μέγιστο δυνατό διάστημα.
Οπότε, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό καταλήγω στο ότι,

$$\int_c^{y(t)} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)dx = t \Leftrightarrow \left(\ln x - \ln(1-x)\right)\Big|_c^{y(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{y(t)}{1-y(t)}}{\frac{c}{1-c}}\right) = t$$

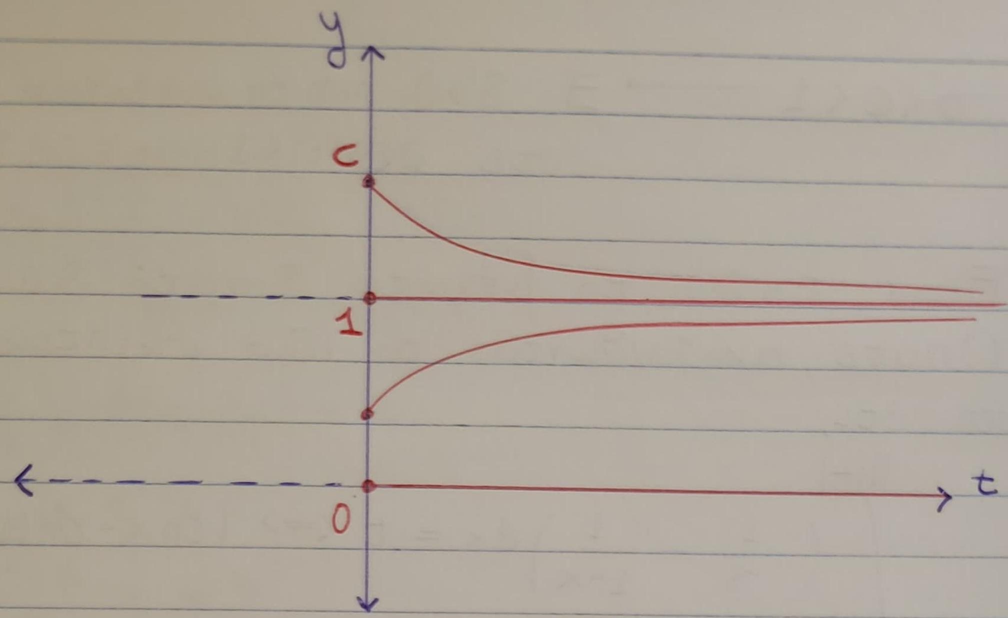
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{y(t)}{1-y(t)}}{\frac{c}{1-c}} = e^t,\ t\in[0,\delta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(t)}{1-y(t)} = \frac{ce^t}{1-c},\ t\in[0,\delta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(t)}{y(t)+1-y(t)} = \frac{\frac{ce^t}{1-c}}{\frac{ce^t}{1-c}+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{ce^t}{ce^t+1-c},\ t\in[0,\delta').$$

Παρατηρώ όμως τότε $0<y(t)<1$, $t\geq 0$
Οπότε το μέγιστο διάστημα της λύσης είναι το $[0,+\infty)$.



v) $c<0$, απο συνέχεια της y στο 0 $\exists\, \delta>0$:
$y(t)<0$, $t\in[0,\delta)$ το μέγιστο διάστημα.

Κατα τον ίδιο /παρόμοιο τρόπο με πριν έχουμε ότι:

$$\int_c^{y(t)} \left(-\frac{1}{-x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = t \iff \left(\ln(-x)-\ln(1-x)\right)\Big|_c^{y(t)} = t$$

$$\iff \left(\ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)\right)\Big|_c^{y(t)} = t$$

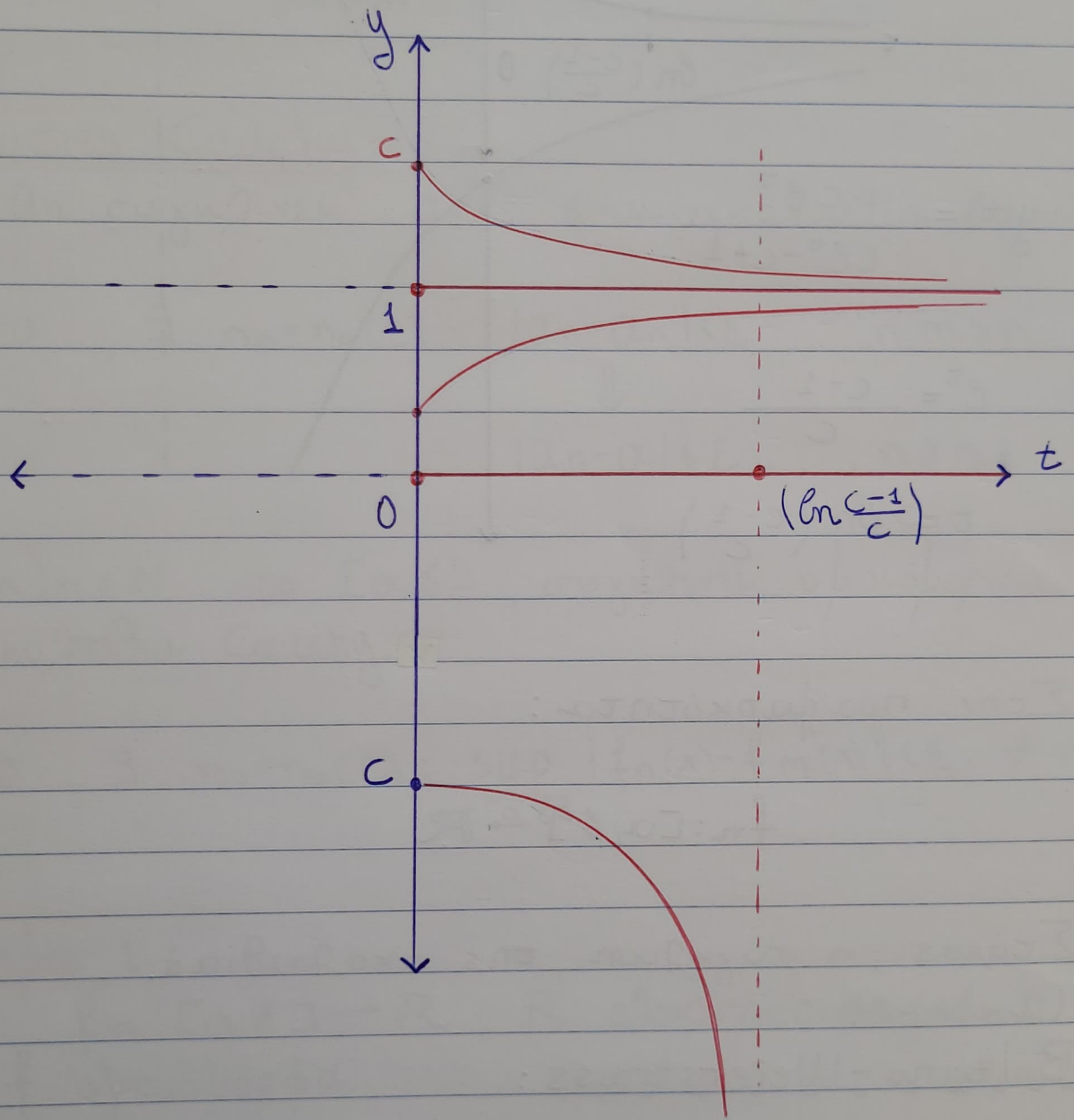
$$\iff \ln\left(\frac{\frac{-y(t)}{1-y(t)}}{\frac{-c}{1-c}}\right) = t$$

$$\iff \frac{\frac{-y(t)}{1-y(t)}}{\frac{-c}{1-c}} = e^t, \quad t\in[0,\delta')$$

$$\iff \frac{y(t)}{1-y(t)} = \frac{ce^t}{1-c}, \quad t\in[0,\delta')$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y(t)}{y(t)+1-y(t)} = \frac{\dfrac{ce^t}{1-c}}{\dfrac{ce^t}{1-c}+1}$$

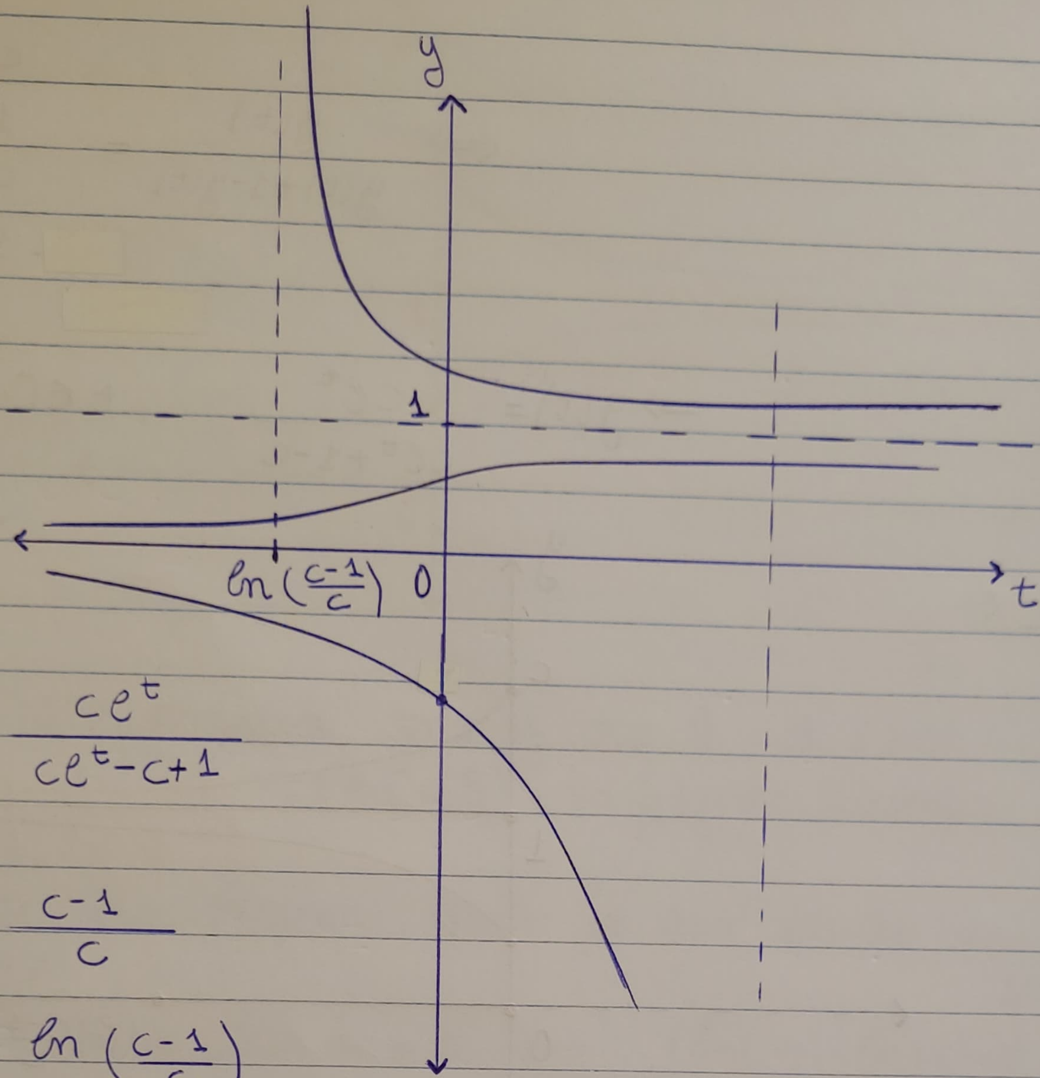
$$\Longrightarrow y(t) = \frac{ce^t}{ce^t+1-c}, \quad t \in [0, \delta')$$



- Αν είχαμε,

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(1-y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = c \end{cases}$$

Για να είναι λύση πρέπει: $y \in C(\mathbb{R}) \cap D(\mathbb{R})$.



$$y(t) = \frac{ce^t}{ce^t - c + 1}$$

$$e^t = \frac{c-1}{c}$$

$$t = \ln\left(\frac{c-1}{c}\right)$$

- Στην πραγματικότητα:

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$$

Στόχος, η σύγκλιση της ακολουθίας. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bolzano - Weierstrass:

- Εάν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη $\Rightarrow$ $\exists$ συγκλίνουσα υπακολουθία.

- Το αντίστοιχο σε ακολουθίες συναρτήσεων $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. (Ομοιόμορφη Σύγκλιση).

• Πότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$;

$\forall \, \varepsilon > 0$, $\exists \, n_0 = n_0(\varepsilon, x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $n \geq n_0(\varepsilon, x)$

$\exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall \, n \geq n_0$, $\forall x$.

$\forall \, \varepsilon > 0$, $\exists \, n_0(\varepsilon) : \sup\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $n \geq n_0$

Ακολουθίες Cauchy:

Η a_n συγκλίνει ανν είναι ακολουθία Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$, $n, m \geq n_0$.

$$\Downarrow$$

$|a_n - a| \leq \varepsilon$, $n \geq n_0$.

• Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $[\alpha, \beta]$, συγκλίνει ομοιόμορφα ανν είναι ακολουθία Cauchy.

$\forall \, \varepsilon > 0$, $\exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) : \sup\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall \, n, m \geq n_0$

Θεώρημα 1:

Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, R ολοκληρώσιμη και $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

$\Rightarrow f$ Riemman ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

Θεώρημα 2:

Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα

$\Longrightarrow$ η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 3:

Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες, τέτοιες ώστε: $f_n' \to g$ ομοιόμορφα. Επιπρόσθετα $\exists\, x_0 \in [a, b]$ ώστε $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.
Τότε $\exists\, f$ τ.ω $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$f'(x) \equiv g(x) \quad , \text{ στο } [a, b].$$