30/11/23

- Το διάγραμμα φάσεων αφορά 2×2 γραμμικά συστήματα!
- Παίρνουμε την τροχιά της λύσης και την προβάλλουμε στο xy-επίπεδο.

3) Να γίνει το διάγραμμα φάσης των λύσεων του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,

$$\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{bmatrix} = (3+\lambda)(2+\lambda) - 2$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 6 - 2$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 4$$

$$\boxed{\lambda = -1}, \boxed{\lambda = -4}$$

Μια λύση στη μορφή:

$$e^{-t} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} (-3\alpha + \sqrt{2}\beta) = -\alpha \\ (\sqrt{2}\alpha - 2\beta) = -\beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha = \sqrt{2}\beta \\ \beta = \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \beta = \sqrt{2}\alpha \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha\sqrt{2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Μια λύση : $e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Μια δεύτερη λύση: $e^{-4t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Τότε πρέπει,

$$\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -3\alpha + \sqrt{2}\beta = -4\alpha \\ \sqrt{2}\alpha - 2\beta = -4\beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = -\sqrt{2}\beta \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Η δεύτερη λύση: $e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

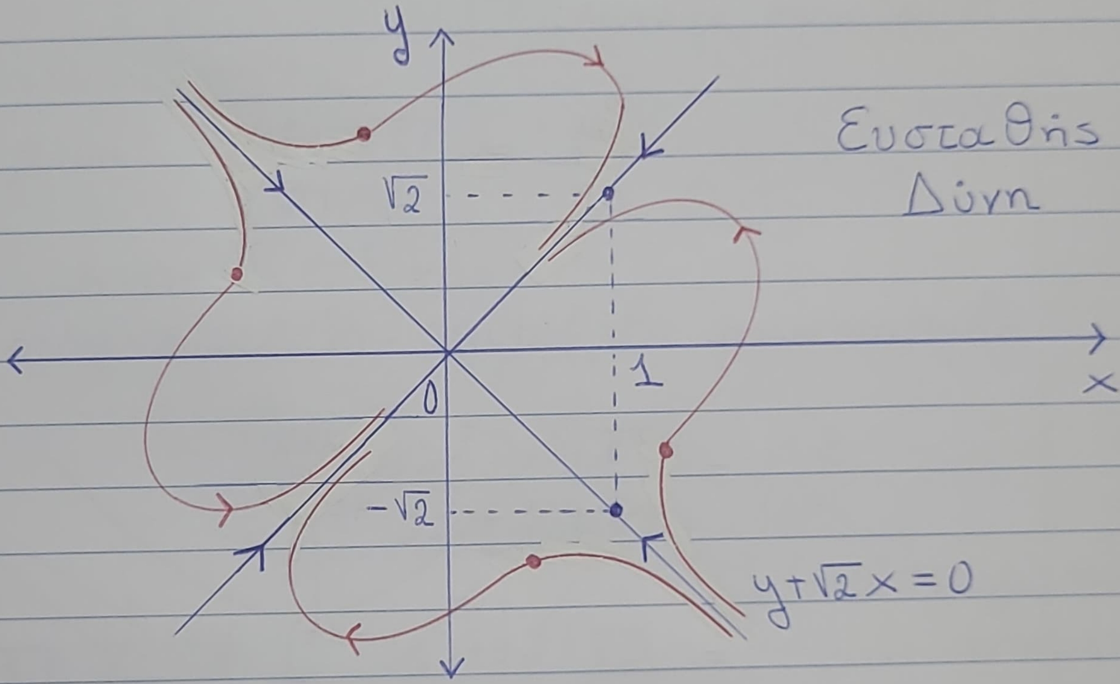
Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}$$
$$y(t) = \sqrt{2}\,(c_1 e^{-t} - c_2 e^{-4t})$$

Ειδικές λύσεις: $c_1 = 1\,,\ c_2 = 0$

$x = e^{-t}$
$y = \sqrt{2}\, e^{-t}$



Αυτή είναι μια αναλλοίωτη ευθεία.

Για $(x_0, y_0) \longrightarrow y_0 = \sqrt{2}\, x_0$

Τότε,

$$\frac{d}{dt}\big(y(t) - \sqrt{2}\,x(t)\big) = y'(t) - \sqrt{2}\,x'(t)$$

$$= \sqrt{2}\,x(t) - 2y(t) - \sqrt{2}\,(-3x(t) + \sqrt{2}\,y(t))$$

$$= \sqrt{2}\,x(t) - 2y(t) + 3\sqrt{2}\,x(t) - 2y(t)$$

$$= 4\sqrt{2}\,x(t) - 4y(t)$$

$$= -4\left(y(t) - \sqrt{2}\,x(t)\right)$$

$f(t) = y(t) - \sqrt{2}\,x(t)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) = -4f(t) \\ f(t_0) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow f(t) \equiv 0.$$

Απαλοιφή χρόνου:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}x - 2y}{-3x + \sqrt{2}y}$$

Ουσιαστικά θέλουμε να δούμε πόσο κάνει το πηλίκο:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sqrt{2}(c_1 e^{-t} - c_2 e^{-4t})}{c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(c_1 + c_2 e^{-3t})}{c_1 + c_2 e^{-3t}} \xrightarrow{t \to +\infty} \sqrt{2} \quad (y = \sqrt{2}x)$$

$$\xrightarrow{t \to -\infty} -\sqrt{2}$$

για $t \to +\infty$, πάει ασυμπτωτικά στην μεγαλύτερη ισοτιμή

για $t \to -\infty$, πάει ασυμπτωτικά στην μικρότερη ισοτιμή.

4) (Ιδιοτιμές πραγματικές ετερόσημες)
Να γίνει το διάγραμμα φάσης των λύσεων του συστήματος

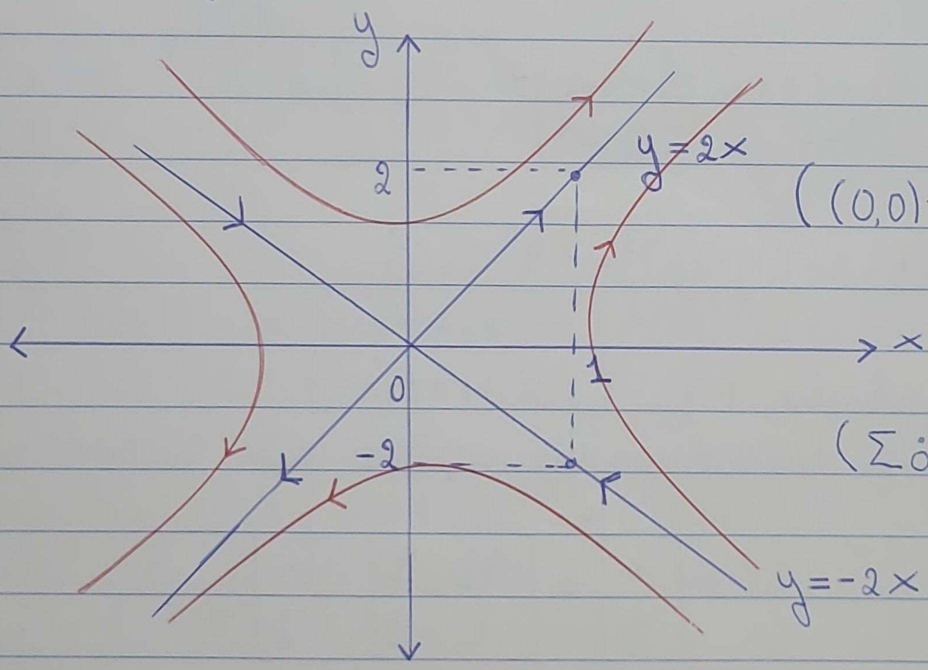
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Μια βάση λύσεων είναι:

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}$, • $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$

$\Rightarrow$ Γενική λύση:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$
$$y(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}$$



((0,0) → σαγματικό σημείο)

(Σάγμα)

Αν δεν είμαστε πάνω στις ευθείες:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}}{c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}} \xrightarrow{t \to +\infty} 2 \quad (y = 2x)$$

$$\xrightarrow{t \to -\infty} -2$$

Αν θέλω να γράψω την καμπύλη θα απαλοίψω τον χρόνο:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \\ y = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y + 2x = 4C_1 e^{3t} \\ y - 2x = -4C_2 e^{-t} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \bullet\ e^{-t} = \frac{y-2x}{-4C_2} \Rightarrow e^{t} = \frac{-4C_2}{y-2x}$$

$$\bullet\ e^{3t} = \frac{y+2x}{4C_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2x}{4C_1} = -\left(\frac{4C_2}{y-2x}\right)^3$$

$$\Rightarrow (y+2x)(y-2x)^3 = -4^4 C_1 C_2^3$$

5) (Μιγαδικές Ρίζες)

Να γίνει το διάγραμμα φάσης των λύσεων του:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι: $\boxed{\lambda = -\frac{1}{2} \pm i}$

Ιδιοδιανύσματα: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}+i\right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\alpha + \beta = \left(-\frac{1}{2}+i\right)\alpha \\ -\alpha - \frac{1}{2}\beta = \left(-\frac{1}{2}+i\right)\beta \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \beta = i\alpha$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ i\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-t/2} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{bmatrix} e^{-t/2}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{-t/2} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t/2}$$

Οπότε οι λύσεις της μορφής:

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^{-t/2} \quad , \cdot \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t/2}$$

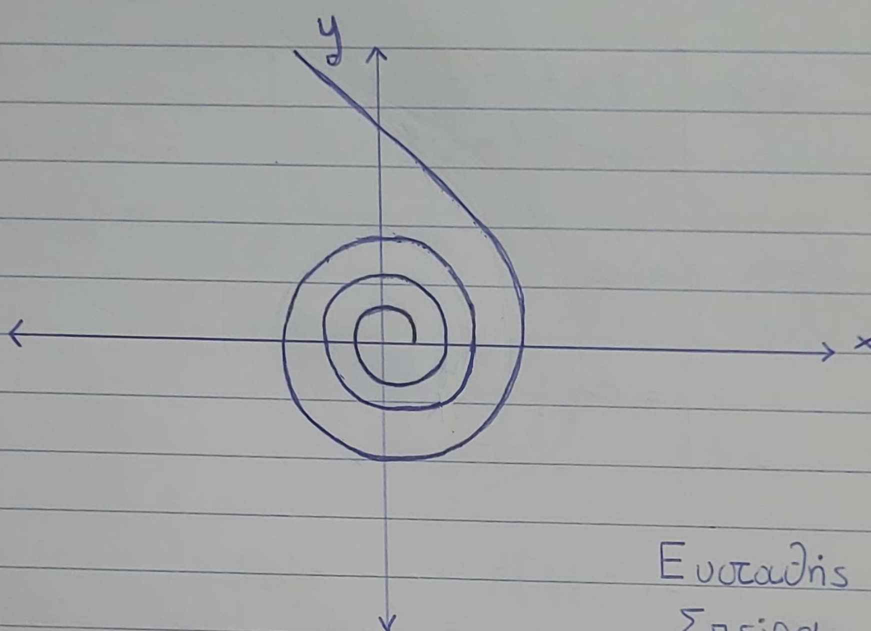
$$\Rightarrow x(t) = c_1 \cos t\, e^{-\frac{t}{2}} + c_2 \sin t\, e^{-\frac{t}{2}}$$
$$y(t) = c_1 \sin t\, e^{-\frac{t}{2}} + c_2 \cos t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = c_1^2 e^{-t} + c_2^2 e^{-t} = (c_1^2 + c_2^2) e^{-t}$$

$\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}$

$x' = -\frac{1}{2}x + y$

$y' = -x - \frac{1}{2}y$



Ευσταθής Σπείρα

Εάν το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής ήταν καθαρά θετικό, τότε θα είχαμε ασταθή σπείρα.

6) (Πολλαπλές πραγματικές ρίζες)
Να γίνει το διάγραμμα φάσης των λύσεων του:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ιδιοτιμή: 2 (πολλαπλότητας 2)
Μια λύση είναι της μορφής:

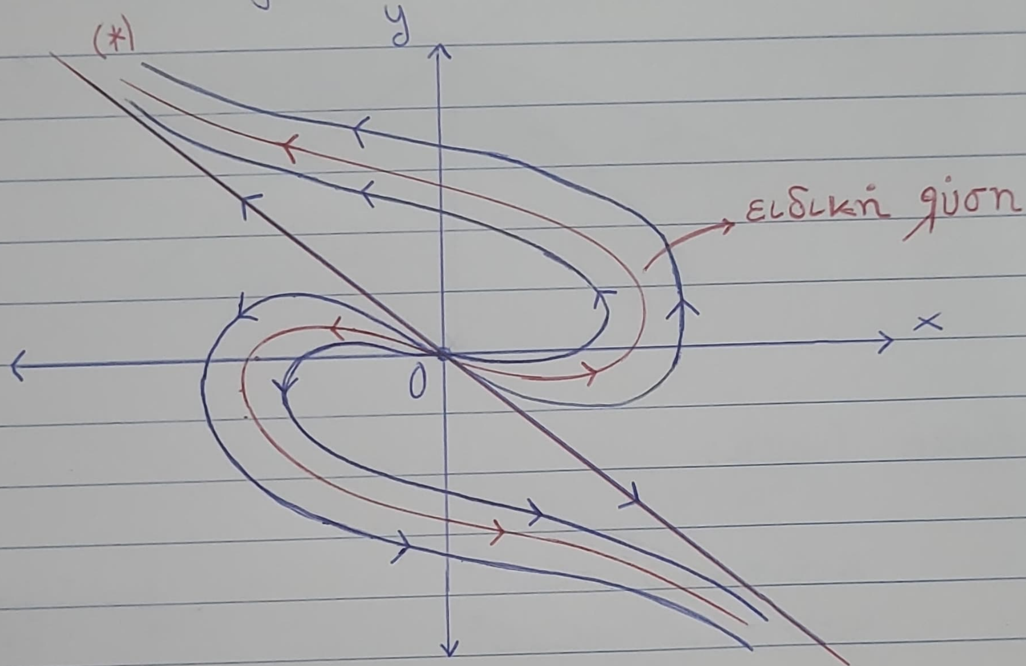
$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Με τη διαδικασία των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, βρίσκουμε μια δεύτερη λύση της μορφής:

$$\cdot \begin{bmatrix} t \\ -(1+t) \end{bmatrix} e^{2t}$$

Γενική λύση:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$
$$y(t) = -c_1 e^{2t} - c_2 (1-t) e^{2t}$$



$$\frac{y}{x} = \frac{-c_1 - c_2(1+t)}{c_1 + c_2 t} \xrightarrow{t \to +\infty} -1$$

$$(*) \begin{cases} x = t e^{2t} \\ y = -(1+t) e^{2t} \end{cases} \Rightarrow y = -e^{2t} - x$$

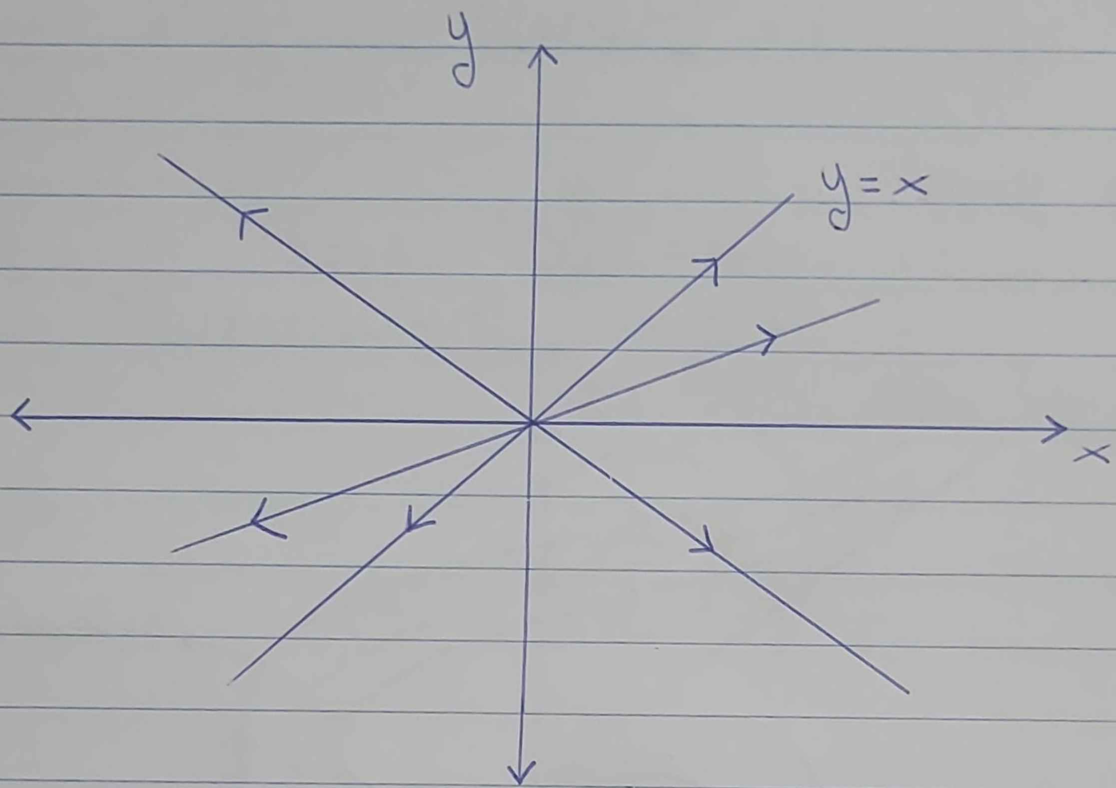
$$\Rightarrow y + x = -e^{2t}$$

$$\Rightarrow \frac{y+x}{x} = -\frac{1}{t}$$

Το $(0,0)$ είναι ασταθής δίνη.

• Αν είχαμε διπλή ιδιοτιμή $1>0$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ιδιοδιανύσματα



Γενική Λύση:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^t$$
$$y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^t$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-c_1 + c_2}{c_1 + c_2}$$