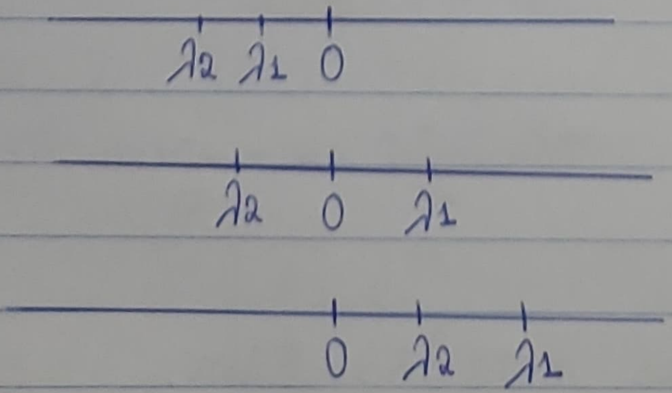
05/12/23

• Αν ιδιοτιμές δύο διακεκριμμένες πραγματικές :



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + c_2 \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

$$x(t) = c_1 \kappa e^{\lambda_2 t} + c_2 \mu e^{\lambda_1 t}$$
$$y(t) = c_1 \lambda e^{\lambda_2 t} + c_2 \nu e^{\lambda_1 t}$$

- **Μη Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα:**

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x} + \vec{f}(\vec{x})$$

Υποθέτουμε ότι $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ και $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{0}} \dfrac{\vec{f}(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \vec{0}$

με $\forall$ ιδιοτιμή $<0$

**Θεώρημα:** (Ευστάθεια Γραμμικοποίησης)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, συμμετρικός, με κάθε ιδιοτιμή αρνητική. Η $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ικανοποιεί:

$$\lim_{\vec{y} \to \vec{0}} \frac{\langle \vec{f}(\vec{y}), \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} = 0$$

Τότε, η μηδενική λύση του συστήματος:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(\vec{x}(t))$$
$$\vec{x}(0) = \vec{c}$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση.

# Ασυμπτωτικά Ευσταθής:

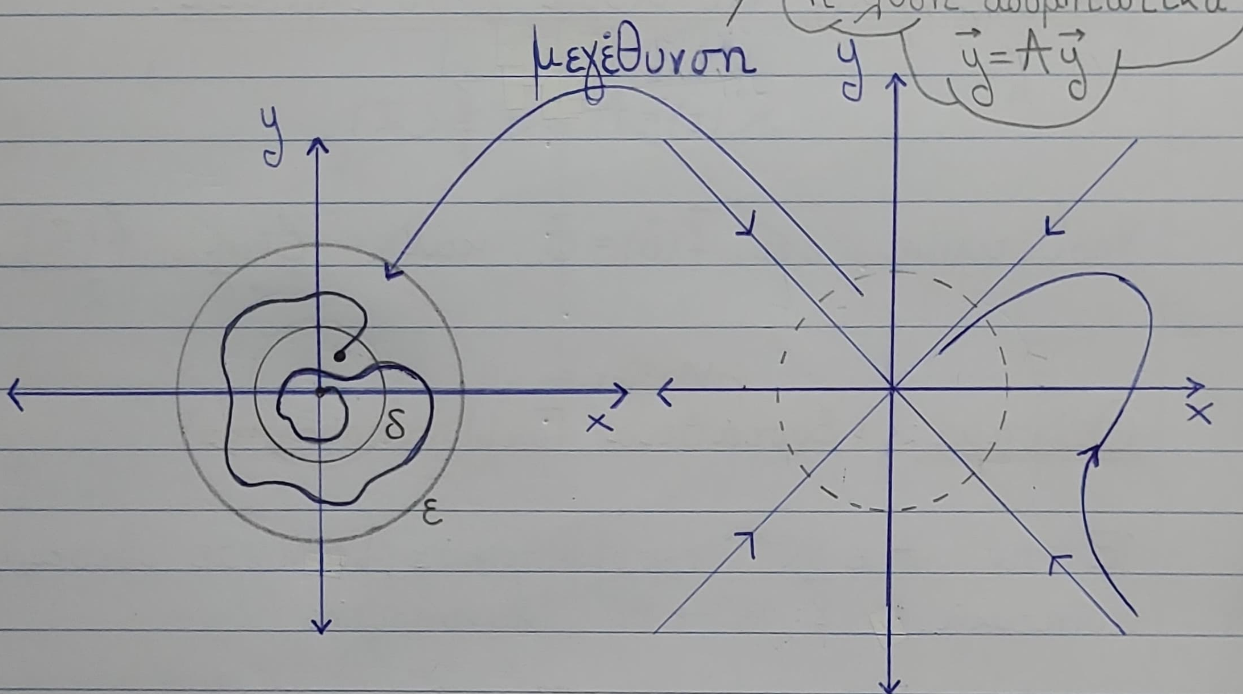
1) Ευσταθής αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τ.ω $\|\vec{c}-\vec{0}\|<\delta$ τότε

$$\|\vec{x}(t)-\vec{0}\|<\varepsilon \quad , \forall t\geq 0$$

2) Επιπρόσθετα,

$$\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t)=0$$

έτσι "κινείται" περίπου η λύση ασυμπτωτικά $\vec{y}=A\vec{y}$




## Απόδειξη:

Επειδή ο $A$ είναι συμμετρικός, είναι διαγωνιοποιήσιμος
Οπότε, $\exists$ $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος

$$A = P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$$

όπου $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n<0$, οι ιδιοτιμές του $A$.

Οπότε,

$$A\vec{x} = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}\vec{x}$$

$$\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

Τότε, για $\vec{x} = P\vec{y}$ έχουμε

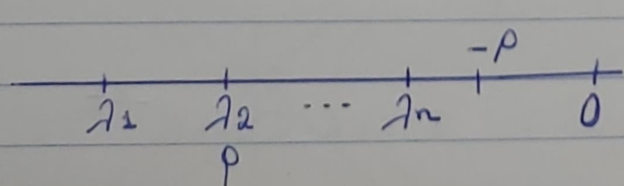
$$A\vec{x} = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\vec{y}$$

$$= P\begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{bmatrix}$$

αφού $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ και $P = (\alpha_{ij})$

$$= \begin{bmatrix} \sum_j \alpha_{ij}\lambda_j y_j \\ \vdots \\ \sum_j \alpha_{nj}\lambda_j y_j \end{bmatrix}$$

Οπότε, $\langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle \leqslant -\rho \|\vec{x}\|^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$



• ιδιότητα ευσταθών πινάκων: $\langle A\vec{y}, \vec{y}\rangle \leq -c\|\vec{y}\|^2$

Επειδή,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\langle \vec{f}(y), y\rangle}{\|\vec{y}\|^2} = 0$$

$\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta_1>0$ τ.ω

$$\forall \|\vec{y}\|<\delta_1 \Rightarrow \frac{|\langle \vec{f}(\vec{y}), \vec{y}\rangle|}{\|\vec{y}\|^2} < \varepsilon$$

$$|\langle \vec{f}(\vec{y}), \vec{y}\rangle| < \varepsilon \|\vec{y}\|^2$$

Έστω $\varepsilon := \rho/2$

Έστω $\vec{x}(0) = \vec{c}$ με κατάλληλο $\rho > 0$.

$$\Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 : \|\vec{y}\| < \delta_1, \text{ τότε } |\langle \vec{f}(\vec{y}), \vec{y}\rangle| \leq \frac{\rho}{2}\|\vec{y}\|^2.$$

Επιλέγουμε $\|\vec{c}\| < \delta_1$ και θέτουμε $\sigma(t) = \frac{1}{2}\|\vec{x}(t)\|^2$

Οπότε, $\sigma'(t) = \langle \vec{x}'(t), \vec{x}(t)\rangle$

$$= \langle A\vec{x}(t) + \vec{f}(\vec{x}(t)), \vec{x}(t)\rangle$$

$$= \langle \vec{A}\vec{x}(t), \vec{x}(t)\rangle + \langle \vec{f}(\vec{x}(t)), \vec{x}(t)\rangle$$

$$\leq -\rho\|\vec{x}(t)\|^2 + \frac{\rho}{2}\|\vec{x}(t)\|^2$$

$$= -\frac{\rho}{2}\|\vec{x}(t)\|^2$$

$$= -\rho\,\sigma(t)$$

Από Gronwall: $\sigma(t) \leq \sigma(0) e^{-\rho t}$

$$\Longrightarrow \|x(t)\|^2 \leq \|\vec{c}\|^2 e^{-pt} \quad , t \geq 0$$

$\blacksquare$

Ξανα γυρίζουμε στα 2x2 γραμμικά συστήματα.

**Απλές περιπτώσεις:**

**Παραδείγματα:**

1) Να γίνει το διάγραμμα φάσης του

$$x' = y(1+x^2)$$
$$y' = x(1+x^2)$$

**Λύση:**

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} x' = y + yx^2 \\ y' = x + x^3 \end{array}$$

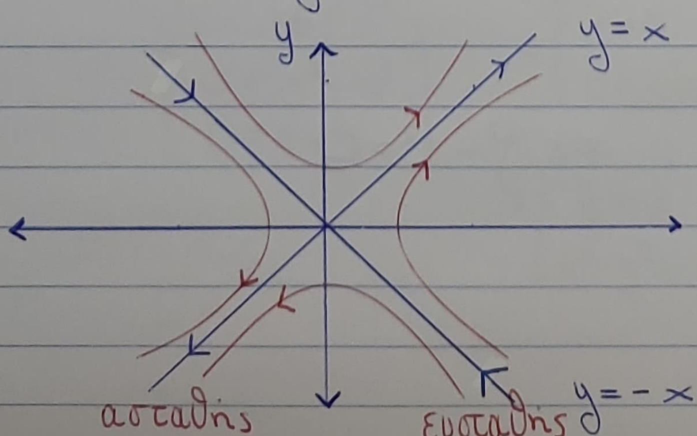
μη-γραμμικό κομμάτι

γραμμικό κομμάτι

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(y^2 - x^2) = 2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

Τοτε, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ : $y^2 - x^2 = c$




• $y = -x$
$\to x' = -x(1+x^2)$

• $y^2 - x^2 = c$
$\to (y-x)(y+x) = c$

Αν εισάγω καινούργιο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} X = x-y \\ Y = x+y \end{array}\right\} \Rightarrow XY = C$$ (υπερβολή)

2) Να γίνει το διάγραμμα φάσης του:

$$\begin{array}{l} x' = y(x^2-1) \\ y' = x(x^2-1) \end{array} \xrightarrow[\text{γραμμικό}]{\text{το}} \begin{array}{l} x' = -x + x^2 y \\ y' = -x + x^3 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Στάσιμα ή Κρίσιμα σημεία:

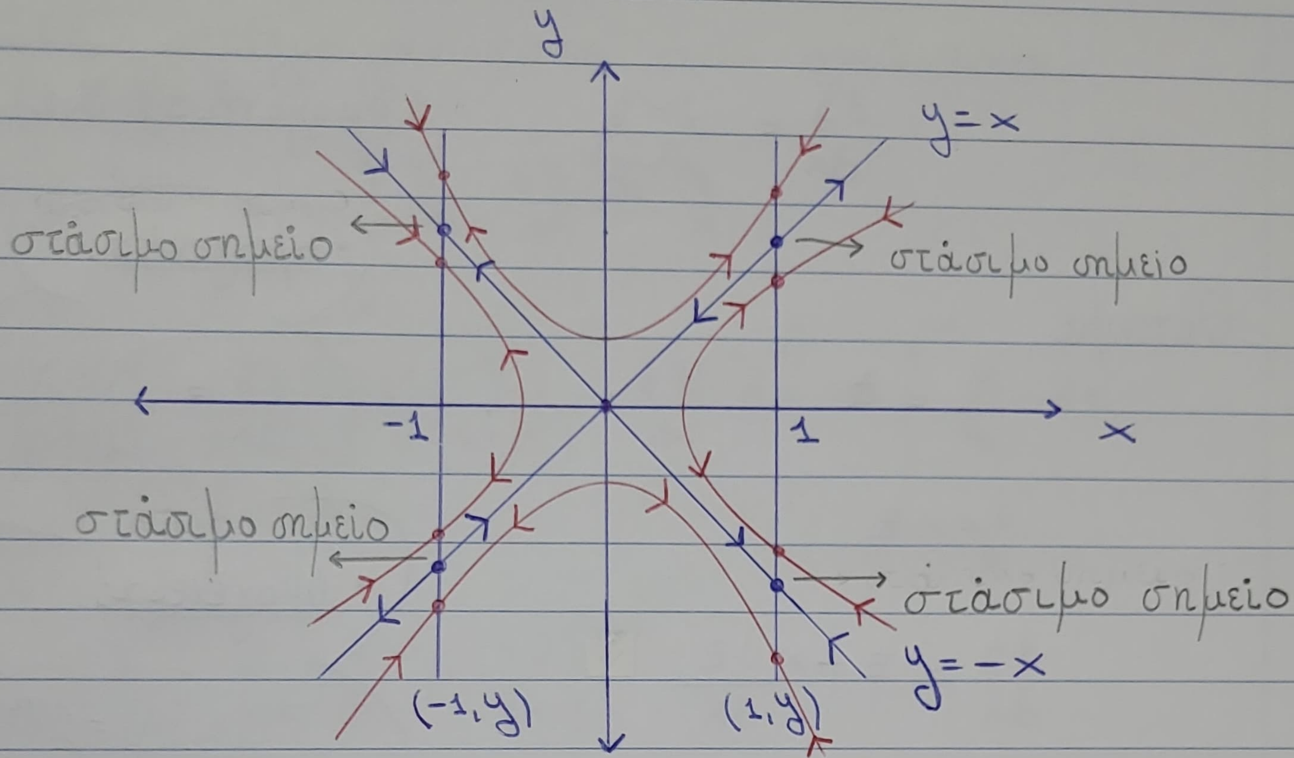
$$\left[\begin{array}{l} y(x^2-1) = 0 \\ x(x^2-1) = 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (1,y) \\ (x,y) = (-1,y) \end{array}\right. , y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(y^2 - x^2) = 2y\frac{dy}{dx} - 2x$$

$$= 2y\left(\frac{x}{y}\right) - 2x = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = C.$$




$$(x_0,y_0)=(1,y_0) \Longrightarrow (x(t),y(t))=(1,y_0)$$

3) Να γίνει το διάγραμμα φάσης του:

$$x' = x^2 - y^2$$
$$y' = 2xy$$

Λύση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Τα στάσιμα σημεία:

$$\begin{bmatrix} 0 = x^2 - y^2 \\ 0 = 2xy \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow \begin{cases} x=0 \\ 0=x^2-y^2 \end{cases} \Longleftrightarrow (0,0) \\ \searrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow (0,0) \end{matrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$ (ομογενής δ.ε)

• ομογενής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

• ομογένεια:

$$P(\lambda x,\lambda y) = \lambda^m P(x,y)$$
$$Q(\lambda x,\lambda y) = \lambda^m Q(x,y)$$

Θέτουμε

$$\frac{y}{x} = z$$

$$y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2x^2 z}{x^2-(xz)^2}$$

$$= \frac{2z}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{1-z^2}$$

$$= z\left(\frac{2}{1-z^2} - 1\right)$$

$$= z \cdot \frac{2-1+z^2}{1-z^2}$$

$$= \frac{z(1+z^2)}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x\frac{dz}{dx} = \frac{z(1+z^2)}{1-z^2}}$$

Οπότε, χωρίζω γνωστούς από αγνώστους,

$$\frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int_1^x \frac{(1-z^2)}{z(1+z^2)}\frac{dz}{dx}\,dx = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$\frac{1-z^2}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} + \frac{-2z}{1+z^2}$$

$$1-z^2 = (\alpha+\beta)z^2+\gamma z+\alpha \longrightarrow \begin{matrix} \alpha+\beta=-1 \\ \gamma=0 \\ \alpha=1 \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} \beta=-2 \\ \gamma=0 \\ \alpha=1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \ln|z(x)| - \ln(1+z^2) = \ln x + c$$

$$\ln\left|\frac{z}{1+z^2}\right| = \ln|x| + c$$

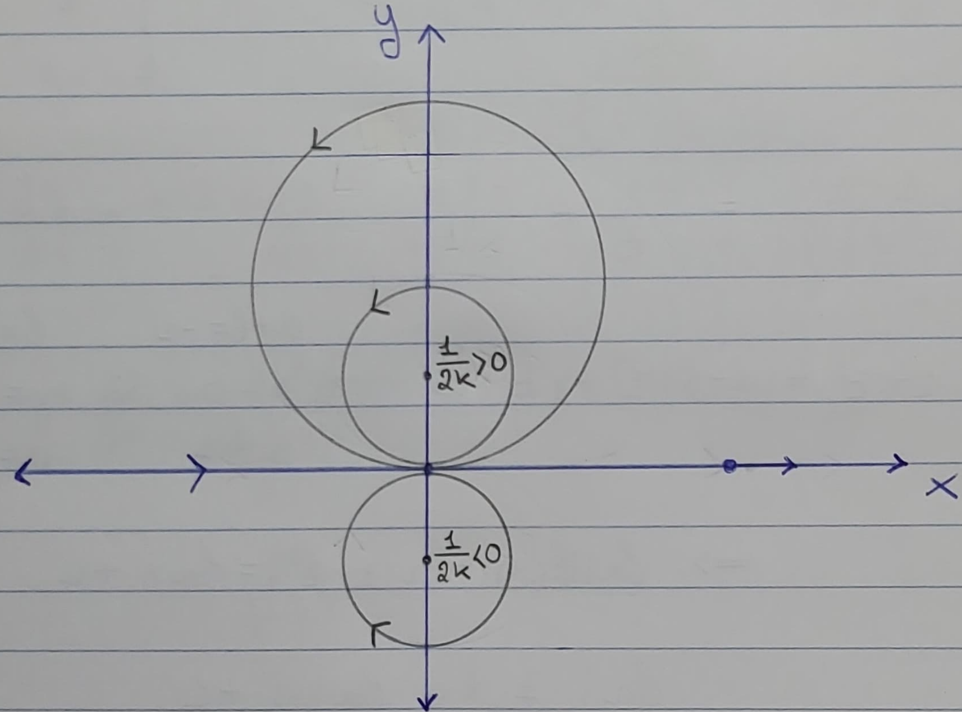
$$\left|\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\right| = k|x| \quad , k\in\mathbb{R}$$

$$\left|\frac{xy}{y^2+x^2}\right| = k|x|$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y}{y^2+x^2} = k$$

$$y^2+x^2-\frac{1}{k}y=0$$

$$\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2+x^2=\frac{1}{(2k)^2}$$




07/12/23

"Εξυπνη λύση":

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\right)=\frac{y'(x^2+y^2)-y(2xx'+yy')}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2xy(x^2+y^2)-y(2x(x^2-y^2)+2y\cdot 2xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=2xy(x^2+y^2)-2xy(x^2-y^2+2y^2)=0.$$

$$\frac{1}{k}y = x^2+y^2 \iff \left(y-\frac{1}{2k}\right)^2$$

$$0 = x^2+y^2-2\cdot\frac{1}{2k}y+\left(\frac{1}{2k}\right)^2-\left(\frac{1}{2k}\right)^2$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2k}\right)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 > 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 2xy$$

$$y(0)=0$$

- Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα:

$$x' = x^2-y^2$$
$$y' = 2xy$$

Λυση:

Θέτουμε, $z(t) = x(t)+iy(t)$

$$\Rightarrow z'(t) = x'(t)+iy'(t)$$
$$= x^2(t)-y^2(t)+i2x(t)y(t)$$

Ξέρω οτι, $z^2(t) = x^2(t)-y^2(t)+2xyi$

$$\Rightarrow z'(t) = z^2(t)$$

Βρίσκομαι στο μιγαδικό επίπεδο και όχι στην πραγματική ευθεία.
Οπότε,

$$\left(\frac{1}{z(t)}\right)' = 1 \qquad , z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{z(t)} = -t + c \qquad , c \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{t+c} \qquad , c = \alpha + \beta i \ , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{t+\alpha+\beta i}$$

$$= -\frac{(t+\alpha)-\beta i}{(t+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= -\frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\beta}{(t+\alpha)^2+\beta^2} i$$

Άρα, $$x(t) + iy(t) = -\frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\beta}{(t+\alpha)^2+\beta^2} i$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{t+\alpha}{(t+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$y(t) = \frac{\beta}{(t+\alpha)^2+\beta^2}$$