12/12/23

Συντηρητικά Πεδία:

Θεώρημα:

Έστω $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση και θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$x' = \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)$$

$$y' = -\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)$$

Τότε ένα ολοκλήρωμα του συστήματος είναι:

$$E(x,y) = C.$$

Πλήρης δ.ε:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$dF(x,y) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

όπου, $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$

και άρα, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = P_y$ και $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = Q_x$

αναγκαία συνθήκη: $Q_x = P_y$

Απόδειξη: (Θεωρήματος)

Διότι,

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial E}{\partial y} y'(t)$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial y}\left(-\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad E(x(t), y(t)) = E(x(0), y(0)) = c$$

$$E(x,y) = 0$$

∎

Παράδειγμα:

· Έστω,

$$E(x,y) = xy(x+y-1) = x^2y + xy^2 - xy$$

Οπότε,

$$x'(t) = \frac{\partial E}{\partial y} = x^2 + 2xy - x$$

$$= -x + x^2 + 2xy$$

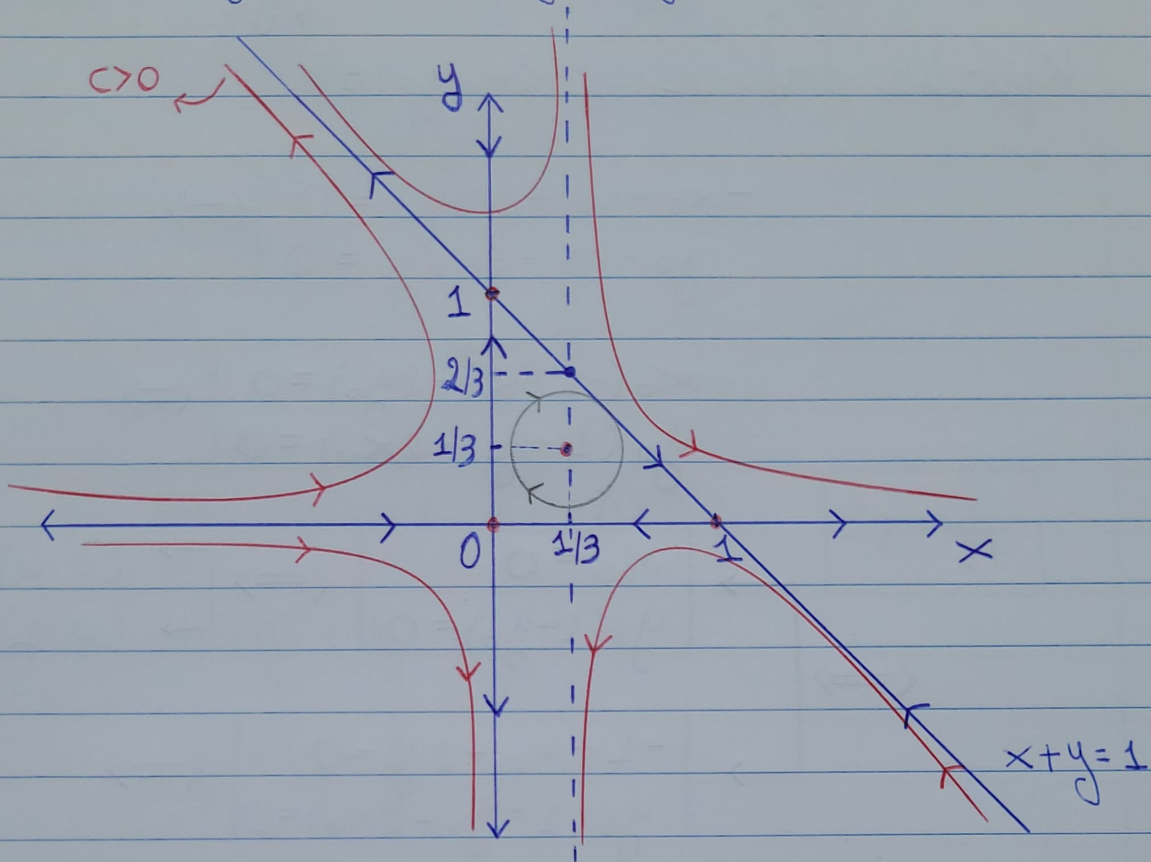
$$y'(t) = -\frac{\partial E}{\partial x} = -(2xy + y^2 - y)$$

$$= y - y^2 - 2xy$$

Θα περιγράψουμε το διάγραμμα φάσης.

Ένα σχήμα του συστήματος είναι:

$$E(x,y) = c \iff xy(x+y-1) = c$$



$$x' = -x(1-x-2y)$$
$$y' = y(1-y-2x)$$

$$\left(-\frac{1}{27} < c < 0\right)$$

για $c=0$: $xy(x+y-1)=0 \Rightarrow (x+y-1)=0$

Οπότε,

$$\frac{d}{dt}(x+y-1) = x'+y'$$
$$= -x+x^2+2xy+y-y^2-2xy$$
$$= -x+y+(x-y)(x+y)$$
$$= (x-y)(x+y-1)$$

$$y' = -\frac{\partial E}{\partial x} \quad , \quad x' = \frac{\partial E}{\partial y}$$

Κρίσιμα σημεία: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} -x_0 + x_0^2 + 2x_0y_0 = 0 \\ y_0 - y_0^2 - 2x_0y_0 = 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0(-1 + x_0 + 2y_0) = 0 \\ y_0(1 - y_0 - 2x_0) = 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0(1-y_0) = 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (0,0) \\ (0,1) \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} -1 + x_0 + 2y_0 = 0 \\ y_0(1 - y_0 - 2x_0) = 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} -1 + x_0 + 2y_0 = 0 \\ 1 - y_0 - 2x_0 = 0 \end{array}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_0 + 2y_0 = 1 \\ 2x_0 + y_0 = 1 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Αφού,

$$xy(x+y-1) = c$$

Οπότε, $\frac{1}{3} y_1 \left(\frac{1}{3} - 1 + y_1\right) = c$

$$\Rightarrow y_1\left(y_1 - \frac{2}{3}\right) = c$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1^2 - \frac{2}{3} y_1 - 3c = 0} \quad (*)$$

• Η (*) δεν έχει λύσεις αν $\Delta < 0$:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4(-3c) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} + 12c < 0$$

$$\boxed{c < -\frac{1}{27}}$$

• Η (*) έχει λύσεις αν $\Delta > 0$: $\boxed{c > -\frac{1}{27}}$

Αφού, $0 < y_1 < \frac{1}{3}$

Τότε,

$$y_1 + y_2 = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = \frac{2}{3} - y_1$$

Δηλαδή,

$$x^2y + xy^2 - xy - c = 0$$

$$y^2 + xy - y - \frac{c}{x} = 0$$

$$y^2 - (1-x)y - \frac{c}{x} = 0$$

$$\Delta = (1-x)^2 + 4\frac{c}{x}$$

$$= \frac{x(1-x)^2 + 4c}{x}$$

Οπότε,

$$y_1(x) = \frac{1 - x - \sqrt{\frac{x(1-x)^2+4c}{x}}}{2}$$

$$y_2(x) = \frac{1 - x + \sqrt{\frac{x(1-x)^2+4c}{x}}}{2}$$

Επομένως,

$$x(1-x)^2+4c=0$$
$$x^3-2x^2+x+4c=0$$
$$x^3-2x^2+x=-4c=4c$$ (το μείον ενσωματώνεται στη σταθερά c).

$$\Rightarrow 3x^2-4x+1=3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+1$$
$$=3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$6x-4=2(3x-2)$$