03/10/23

- Καλή τοποθέτηση Προβλήματος (Hadamard):

1. Ύπαρξη λύσης.
2. Μοναδικότητα λύσης.
3. Συνεχής εξάρτηση των λύσεων απο τις παραμέτρους του προβλήματος.

Έστω $y'(t) = f(t, y(t))$, $t > 0$
$y(0) = c$

1) Τι είναι η λύση;
Πρέπει $y \in D(0,+\infty) \cap C([0,+\infty))$, και να ικανοποιεί:
$y(0) = c$ $\left(\lim_{t \to 0^+} y(t) = c \right)$.
Επίσης, πρέπει $y'(t) = f(t, y(t))$, $\forall\, t > 0$.

- $f: \overset{t}{[a,b]} \times \overset{y}{[c,d]} \to \mathbb{R}$

Η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, αν :

$$\exists\ L>0 \ \text{τ.ω} \ |f(t,y)-f(t,z)| \leqslant L|y-z| \quad \forall t\in[a,b] \ \ \forall y\in[c,d]$$

- Αν $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right| \leqslant M$

Τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

<u>Παράδειγμα:</u>

Π.Α.Τ: $\begin{aligned} y'(t) &= \sqrt{|y(t)|} \quad , t>0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$, έχει άπειρες λύσεις.

Μια λύση είναι η $y(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$

<u>Παρατήρηση:</u>
Η $y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \geqslant 0$, $\forall t>0$.
Οπότε, η $y \uparrow$.
Επομένως, αν $y \not\equiv 0$
Τότε, $\exists\ t_1>0$ ώστε: $y(t_1)>0$.
Απο τη συνέχεια της y στο $t_1>0$, θα υπάρχει κάποιο διάστημα, $t_1\in(a,b)$ με $0\leqslant a$ ώστε $y(t)>0$, $\forall t\in(a,b)$.
! Επιλέγω αν $(a,b)\subset[0,+\infty)$, το μεγαλύτερο δυνατό ώστε $y(t)>0$ $\forall t\in(a,b)$.
Οπότε, $y'(t) = \sqrt{y(t)}$, $t\in(a,b)$.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{t_1}^{t} \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}}\,ds = t - t_1 \quad , t \in (a, b)$$

$y(s) = z$
$dz = y'(s)ds$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = t - t_1.$$

$$\Longleftrightarrow \quad z^{-1/2} = \frac{z^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{z}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (2\sqrt{z})\Big|_{y(t_1)}^{y(t)} = t - t_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\left(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t_1)}\right) = t - t_1$$

$$\sqrt{y(t)} = \sqrt{y(t_1)} + \frac{t - t_1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = \left(\sqrt{y(t_1)} + \frac{t - t_1}{2}\right)^2 \quad , t \in (a, b).$$

<u>Περιπτώσεις</u>:

i) $a > 0 \quad , y(a) = 0$

ii) $a = 0 \quad , y(0) = 0, \quad y(t) > 0 \quad , \forall\, t > 0.$

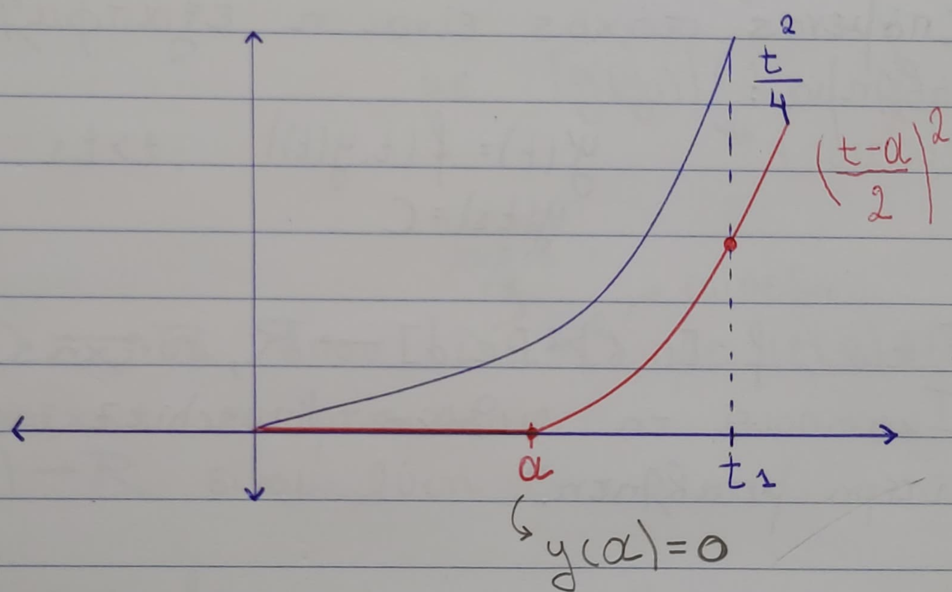
- <u>για την (ii)</u>:

$$\longrightarrow \left(\sqrt{y(t_1)} + \frac{0-t_1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{y(t_1)} = \frac{t_1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow y(t_1) = \frac{t_1^2}{4}$$

Οπότε,
Για $y : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $y(t) = \frac{t^2}{4}$, $t \geq 0$ είναι λύση.



- <u>για την (i)</u>:

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{y(t_1)} + \frac{\alpha-t_1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{y(t_1)} = \frac{t_1-\alpha}{2} \Longleftrightarrow \sqrt{y(t_1)} - \frac{t_1}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

$$\Longrightarrow y(t_1) = \left(\frac{t_1-\alpha}{2}\right)^2$$

Οπότε, έχουμε φτιάξει τις,

$$y_\alpha(t)=\begin{cases}\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{t}{2}\right)^2 & , t\geq\alpha\\ 0 & , 0\leq t\leq\alpha\end{cases}$$

για $\alpha>0$ έχουμε απειρία λύσεων.

Επίσης $y_\alpha\in D(0,+\infty)$.

• Επόμενος στόχος είναι η εξασφάλιση λύσης στο πρόβλημα:

$$y'(t)=f(t,y(t)) \quad , t>t_1$$
$$y(t_1)=C$$

Έστω, $f:[\alpha,\beta]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$, συνεχής.
"Ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή."

Ύπαρξη "τοπικής" λύσης:

Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων:

Έστω $f\in C^1$, σημείο (t_1,y_1) και $f(t_1,y_1)=0$
Αν $\frac{\partial f}{\partial y_1}(t_1,y_1)\neq 0$

Τότε, $\exists\ (\alpha,\beta)\ni t_1$ και $y\in C^1(\alpha,\beta)$ τ.ω $f(t,y(t))=0$ $\forall\ t\in(\alpha,\beta)$.
Οπότε, $\frac{\partial}{\partial y}f(t,y(t))\neq 0 \quad , t\in(\alpha,\beta)$.

$$\frac{d}{dt} f(t, y(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t))}{\frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t))}, \quad y(t_1) = y_1, \ t \in (\alpha, \beta)$$

■

(σταθερό σημείο)

($f(y) = 0 \Leftrightarrow y = g(y)$ και $y_{n+1} = g(y_n)$

με $|g'(y_1)| < 1$)

(συστολή)

Οπότε,

ανοικτό χωρίο

επίπεδο

Έστω $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ με $(t_1, C) \in D$ και $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

Αν $y: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι λύση της

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (\alpha, \beta) \ni t_1$$
$$y(t_1) = C$$

πρέπει $(t, y(t)) \in D$, $\forall \ t \in (\alpha, \beta)$.

Άρα $y \in D(\alpha, \beta)$.

Απο την άλλη αν ολοκληρώσω την,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_1$$
$$y(t_1) = C$$

Θα είχα,

$$\overbrace{y(t)-y(t_1)}^{c}=\int_{t_1}^{t} f(s,y(s))\,ds$$

και άρα η λύση που θα έχει τη μορφή:

$$y(t)=c+\int_{t_1}^{t} f(s,y(s))\,ds \quad , \quad t\in(\alpha,\beta).$$

Λήμμα:

Έστω $y\in C(\alpha,\beta)$ που ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(t)=c+\int_{t_1}^{t} f(s,y(s))\,ds \quad , \forall\, t\in(\alpha,\beta)\ni t_1 .$$

όπου $(t,y(t))\in D$, $\forall\, t\in(\alpha,\beta)$.

Τότε, η $y\in D(\alpha,\beta)$ και ικανοποιεί την:

$$y'(t)=f(t,y(t)) \quad , \forall\, t\in(\alpha,\beta)$$
$$y(t_1)=c .$$

Απόδειξη:

Εάν $y\in C(\alpha,\beta)$ λύση της

σύνθεση συνεχών => συνεχής

$$y(t)=c+\int_{t_1}^{t} f(s,y(s)) \quad , \forall\, t\in(\alpha,\beta)\ni t_1 .$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_1} y(t)=0 \text{ , (Riemman Ολ/μη).}$$

Επιπρόσθετα, η $s \longmapsto f(s,y(s))$, $s\in(\alpha,\beta)$ είναι συνεχής, (σύνθεση της $f:D\to\mathbb{R}$ συνεχής με την $y\in(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Longrightarrow$ συνεχής).

Οπότε, η $y(t)=c+\displaystyle\int_{t_1}^{t} f(s,y(s))\,ds$

$\Longrightarrow$ y είναι παραγωγίσιμη

(Θ.Θ.Α.Λ) $\to$ $y'(t)=f(t,y(t))$, $t\in(\alpha,\beta)$. ■

05/10/23

Θα φτιάξουμε αναδρομική ακολουθία,

$$y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds, \quad t\in[t_0,\beta^*]$$

! Έστω $f:[\alpha,\beta]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής τ.ω (άρα και φραγμένη, αφού έχω κλειστό διάστημα).

$$|f(t,y)|\le M, \quad (t,y)\in[\alpha,\beta]\times[c,d].$$

! Επιπρόσθετα,

σταθερά Lipschitz

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L|y_1-y_2|, \ \forall\, (t,y_1),(t,y_2)\in[\alpha,\beta]\times[c,d]$$

Το πρόβλημά μας είναι το:

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds, \quad t_0\le t \qquad (*)$$

Θεώρημα:

Έστω f όπως πιο πάνω.

Τότε το (*) έχει λύση (συνεχή / α.ο αναρτηση) στο διάστημα $[t_0, b^*]$, όπου $b^* = \min\left(b, t_0 + \frac{y_0 - c}{\mu}, t_0 + \frac{d - y_0}{\mu}, t_0 + \frac{1}{2L}\right)$, με την προϋπόθεση $t_0 \in (a, b)$ και το $y_0 \in (c, d)$.

Παράδειγμα:

Ερώτημα: Τι κάνει η αναδρομική ακολουθία;

Έστω,

$$y(t) = 1 + \int_0^t 3s^2 y(s)\,ds \quad , t \geq 0.$$

$$y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t 3s^2 y_n(s)\,ds \quad , t \geq 0$$

- $y_1(t) = 1 \quad , t \in [0, \infty)$
- $y_2(t) = 1 + \int_0^t 3s^2\,ds = 1 + t^3 \quad , t \geq 0$
- $y_3(t) = 1 + \int_0^t 3s^2(1 + s^3)\,ds = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^6$
- $y_4(t) = 1 + \int_0^t 3s^2\left(1 + s^3 + \frac{s^6}{2}\right)ds = 1 + t^3 + \frac{t^6}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}t^9$
- $y_5(t) = 1 + t^3 + \frac{t^6}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}t^9 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}t^{12}$.

$$= 1 + t^3 + \frac{(t^3)^2}{2!} + \frac{(t^3)^3}{3!} + \frac{(t^3)^4}{4!}.$$

Οπότε,

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t^3)^k}{k!}$$

απόδειξη με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$

$$y_n(t) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^3)^k}{k!} = e^{t^3}$$

<u>Ερώτημα:</u>
<u>Είναι ομοιόμορφη η σύγκλιση στο $[0,+\infty)$;</u>

$\longrightarrow$ Όχι, είναι όμως σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,b]$.

- Για την αναδρομική ακολουθία θέλουμε για να ορίζεται καλά να έχουμε,

! $c \leq y_n(t) \leq d \quad , \quad \forall t \in [t_0, b^*]$

↳ αφού είχαμε ότι $(t,y) \in [a,b] \times [c,d]$

Έχουμε όμως,

$$|y_{n+1}(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds \right|$$

είχαμε πει ότι: $|f(t,y)| \leq M$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_n(s))|\,ds$$

η συνάρτησή μας είναι απολύτως φραγμέν. $\leq \displaystyle\int_{t_0}^{t} M\,ds = M(t - t_0)$

$$\leq M(b^* - t_0)$$

$$\Longrightarrow |y_{n+1}(t) - y_0| \leq M(b^* - t_0)$$

$$\Longleftrightarrow -M(b^* - t_0) \leq y_{n+1}(t) - y_0 \leq M(b^* - t_0)$$

$$y_0 - M(b^* - t_0) \leq y_{n+1}(t) \leq y_0 + M(b^* - t_0)$$

αφού: $c \leq y_n(t) \leq d$

$$\begin{cases} ! \quad c \leq y_0 - M(b^* - t_0) \Longleftrightarrow \boxed{b^* \leq t_0 + \dfrac{y_0 - c}{M}} \\ \text{και} \\ y_0 + M(b^* - t_0) \leq d \Longleftrightarrow \boxed{b^* \leq t_0 + \dfrac{d - y_0}{M}} \end{cases}$$

Τοτε οριζεται καλά η αναδρομική ακολουθία.

$$\longrightarrow y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds \quad , t \in [t_0, b^*]$$

$$y_1(t) \equiv y_0$$

$$\longrightarrow y_{n+2}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n+1}(s))\,ds$$

Με αφαίρεση κατα μέλη παίρνουμε:

$$y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s)) \right) ds$$

$$\Longrightarrow |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s)) \right) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s)) \right| ds$$

Οπότε, διαδοχικά παίρνουμε:

$$|y_3(t)-y_2(t)| \leqslant L\int_{t_0}^{t} |y_2(s)-y_1(s)|\,ds \quad , t\in[t_0, b^*]$$

$$\leqslant LM\int_{t_0}^{t} (s-t_0)\,ds$$

$$= LM\,\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} |y_2-y_0| \\ y_2-y_1 \end{matrix} = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y_0)\,ds\right| \leqslant M(t-t_0)$$

$$\rightarrow |y_3-y_2| \leqslant ML\,\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

$$\rightarrow |y_4-y_3| \leqslant ML^2\,\frac{(t-t_0)^3}{3!}$$

$$|y_4-y_3| \leqslant L\int_{t_0}^{t} |y_3(s)-y_2(s)|\,ds$$

$$\leqslant LML\int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^2}{2!}\,ds$$

$$= ML^2\,\frac{(t-t_0)^3}{3!}$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι:

$$|y_{n+2}(t)-y_{n+1}(t)| \leq ML^n \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M}{L}\frac{(L(b^*-t_0))^{n+1}}{(n+1)!}, \; t\in[t_0, b^*]$$

Ερώτημα:

Συγκλίνει η διαφορά δύο διαδοχικών ομοιόμορφα στο μηδέν ανεξαρτήτως επιλογής;

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L(b^*-t_0))^{n+1}}{(n+1)!} = e^{L(b^*-t_0)} - 1$$

ξέρουμε ότι, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

ακολουθία Cauchy: Τότε για $m>n$:

$$|y_m(t)-y_n(t)| = \left|\sum_{k=n}^{m-1}(y_{k+1}(t)-y_k(t))\right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} |y_{k+1}(t)-y_k(t)|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{M}{L}\frac{(L(b^*-t_0))^k}{k!}$$

$$= \frac{M}{L}\cdot\frac{(L(b^*-t_0))^n}{n!}\cdot\sum_{\ell=0}^{m-n-1}\frac{(L(b^*-t_0))^{\ell}}{\underbrace{\frac{(\ell+n)!}{n!}}_{\text{ξεπερνάει τη μονάδα}}}, \text{ όπου } \ell=k-n, \; k=\ell+n$$