10/10/23

$$\leq \frac{\mu}{L} \frac{(L(b^*-t_0))^n}{n!} \sum_{l=0}^{m-n-1} \frac{(L(b^*-t_0))^l}{1}$$

$$\leq \frac{\mu}{L} \cdot \frac{(L(b^*-t_0))^n}{n!} \cdot \frac{1-(L(b^*-t_0))^{m-n}}{1-(L(b^*-t_0))}$$

$$\leq \frac{\mu}{L} \frac{1}{1-(L(b^*-t_0))} \cdot (L(b^*-t_0))^n$$

όπου $\overbrace{L(b^*-t_0)}^{=1/2} < 1$

$$\boxed{b^* = t_0 + \frac{1}{2L}}$$

Η (y_n) είναι ομοιόμορφη ακολουθία Cauchy στο $[t_0, b^*]$ και επομένως $y_n \to y$ ομοιόμορφα.

Γυρίζοντας στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$\begin{array}{c} y_{n+1}(t) \\ \downarrow \\ y(t) \end{array} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds$$

- $y_n \to y$ ομοιόμορφα στο $[t_0, b^*]$ και γνωρίζουμε ότι

$\exists \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds$ και θέλουμε να κάνει

$$\int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, y_n(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

(4 συνθήκες για το b^*.)

Η σύνθεση της συνεχούς f με την ομοιόμορφα συγκλίνουσα y_n είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία.

$$(|f(t, y_m(t)) - f(t, y_n(t))| \leq L|y_m(t) - y_n(t)|)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \quad , \forall t \in [t_0, b^*].$$

Το θεώρημα αυτό ονομάζεται Picard-Lindelöf.

Πρόταση:

Έστω $f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Ακόμη,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0$$
$$y(t_0) = y_0.$$

→ Ποιό είναι το μέγιστο δυνατό διάστημα για τη λύση αυτής της δ.ε;

Εάν $[t_0, T)$ είναι το μέγιστο δυνατό που ορίζεται η λύση, $(a \leq T \leq b)$, τότε $\exists \lim_{t \to T^-} y(t) \in \{c, d\}$.

Απόδειξη:

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $\exists$ το $\lim_{t \to T^-} y(t)$.

Αποδεικνύοντας, ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[t_0, T)$.

$\left(\forall\, \varepsilon>0 ,\ \exists\, \delta>0 ,\ t,s \in [t_0,T) \ \text{τ.ω} \right.$

$$\left. |y(t)-y(s)|<\varepsilon \quad , \quad |t-s|<\delta . \right)$$

Πράγματι, $y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \quad , \ t\in[t_0,T)$

και

$$y(\xi)=y_0+\int_{t_0}^{\xi} f(s,y(s))ds \quad , \ \xi\in[t_0,T)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνω,

$$|y(t)-y(\xi)| = \left| \int_{\xi}^{t} f(s,y(s))ds \right| \leq M|t-\xi| \quad , \ T<b$$

$\Rightarrow$ y ομοιόμορφα συνεχής.

Οπότε, $\exists\, c \leq \lim_{t\to T^-} y(t) \leq d$ αφού $(c\leq y(t) \leq d)$.

Έστω ότι, $\lim_{t\to T^-} y(t) \in (c,d)$.

Ας πούμε ότι, $\lim_{t\to T^-} y(t) = y_1 \in (c,d)$.

Έστω, η $\tilde{y} := \begin{cases} y(t) & , \ t_0 \leq t < T \\ y_1 & , \ t=T \end{cases}$, και λύνει:

$$\begin{cases} y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \\ \\ y_1(t)= y_0+\int_{t_0}^{T} f(s,\tilde{y}(s))ds \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{y}(s))ds \quad , \forall t \in [t_0, T].$$

Το πρόβλημα,

$$\hat{y}(t) = y_1 + \int_{T}^{t} f(s, \hat{y}(s))ds \quad , \quad T < t \leq b.$$

(το y_1 πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο!)
Εδώ, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις για να υπάρχει ένα διάστημα της μορφής $[T, b^{**}]$,
$b^{**} = \min\left(b, T + \frac{d-y_1}{\mu}, T + \frac{y_1-c}{\mu}, T + \frac{1}{2L}\right)$,
Τότε, όμως η

$$\tilde{y} := \begin{cases} \tilde{y}(t) & , t \in [t_0, T] \\ \hat{y}(t) & , t \in [T, b^{**}] \end{cases},$$

είναι συνεχής στο $[t_0, b^{**}]$ και ικανοποιεί την

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{y}(s))ds \quad , \quad y(t), t \in [t_0, T)$$

ομοιομ. συνεχ $\Rightarrow y$ φραγ.

$\forall t \in [t_0, b^{**}] \Rightarrow \exists \lim_{t \to T^-} y(t)$

α) $t \in [t_0, T]$
β) $t \in [T, b^{**}]$

$$\hat{y}(t) = y_1 + \int_{T}^{t} f(s, \tilde{y}(s))ds$$

Δηλαδή, $\tilde{y}(t) = y_1 + \int_{T}^{t} f(s, \tilde{y}(s))ds$

$$= y_0 + \int_{t_0}^{T} f(s,\tilde{y}(s))ds + \int_{T}^{t} f(s,\tilde{y}(s))ds$$

$$= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{y}(s))ds.$$

Οπότε,

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{y}(s))ds$$

και,

$$\tilde{y}_1(T) = y_0 + \int_{t_0}^{T} f(s,\tilde{y}(s))ds$$

$\Rightarrow$ Το διάστημα που ορίζεται η λύση $\tilde{y}$ περιέχει το $[t_0, b^{**}] \overset{?}{\supsetneq} [t_0, T]$.

Αντίφαση, το $[t_0, T)$ ήταν το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα.

Θεώρημα:
Έστω $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής που ικανοποιεί "τοπικά" τη συνθήκη Lipschitz, ($\forall\ [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2\ \exists\ L>0$ τ.ω $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,\ \forall\ t\in[a,b]\ ,\ x,y\in[c,d]$.) ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και,

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

Αν $t_0\in(t_1,t_2)$, το μεγιστικό διάστημα που η λύση ορίζεται ένα από τα ακόλουθα αληθεύει:

i) $(t_1, t_2) = \mathbb{R}$

ii) $t_1 > -\infty$, τότε στο t_1 έχουμε έκρηξη της λύσης
Δηλαδή,
$$\limsup_{t \to t_1^+} |y(t)| = +\infty$$

iii) $t_2 < +\infty$, τότε στο t_2 έχουμε έκρηξη της λύσης
Δηλαδή,
$$\limsup_{t \to t_2^-} |y(t)| = +\infty$$

Απόδειξη:
Έστω $t_0 \in (t_1, t_2)$, το μεγιστικό διάστημα που ορίζεται η λύση με $t_1 > -\infty$.
Θα αποδείξουμε ότι έχουμε έκρηξη λύσης.
Έστω ότι δεν έχουμε.
Δηλαδή,
$$\limsup_{t \to t_1^+} |y(t)| < +\infty.$$

Τότε η λύση $y := (t_1, t_0]$ είναι φραγμένη,
και ικανοποιεί,
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds, \quad t \in (t_1, t_0]. \qquad (*)$$

Τώρα θα δω τι κάνει η $f(t, y(t))$ στο $t \in (t_1, t_0]$ με το $y(t)$ να τρέχει στο $|y(t)| \leq M$, και την ορίζω ως
$f : [t_1, t_0] \times [-M, M] \to \mathbb{R}$.
Τότε, $\exists\ \tilde{M} > 0$ ώστε:
$$|f(t, y(t))| \leq \tilde{M}, \quad \forall t \in (t_1, t_0].$$
↳ εξασφάλιση ομοιόμορφης συνέχειας.

Επειδή, έχω την (*) $t, s \in (t_1, t_0]$

$$y(s) = y_0 + \int_{t_0}^{s} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχω ότι,

$$y(t) - y(s) = \int_{s}^{t} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

Οπότε,

$$|y(t) - y(s)| \leqslant \left| \int_{s}^{t} f(\xi, y(\xi))d\xi \right|$$

$$\leqslant \tilde{M}\, |t-s|$$

$\Rightarrow$ y ομοιόμορφα συνεχής στο $(t_1, t_0]$ και μπορώ να την επεκτείνω αριστερότερα του t_1.
Άτοπο!

<u>12/10/23</u>

<u>Στόχος</u>: Το μονοσήμαντο των λύσεων.
Η συνθήκη Lipschitz, ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \ t > t_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

Έστω $f: D \to \mathbb{R}^2$, όπου D ανοικτό και ανεκτικό $\subseteq \mathbb{R}^2$.

<u>Τοπικά Lipschitz:</u>

$\forall\ K \subset\subset D$ (↳ συμπαγές) $\exists\ L = L_K > 0$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|, \quad \forall\ (t,x), (t,y) \in K.$$

Έστω $f: [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

Θεώρημα:

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, συνεχής και, ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz. Τότε το Π.Α.Τ

$$y'(t)=f(t,y(t)), \quad t>t_0$$
$$y(t_0)=y_0$$

έχει το πολύ μία λύση.

Λήμμα Gronwall:

Έστω $\sigma: [a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο (a,b) και τ.ω

$$\sigma'(t)\leq g(t)\sigma(t), \quad b>t>a$$

όταν $g:[a,b)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε,

$$\sigma(t)\leq \sigma(a)e^{\int_a^t g(s)ds}, \quad \forall t\in[a,b).$$

Απόδειξη: (Λήμματος)

Αν εφαρμόσω πολ/στη Euler τότε έχω ότι,

$$e^{-\int_a^t g(s)ds}\cdot(\sigma'(t)-g(t)\sigma(t))\leq 0, \quad t<a$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_a^t g(s)ds}\cdot\sigma(t)\right)\leq 0$$

$$\text{ΘΜΤ} \Rightarrow e^{-\int_a^t g(s)ds}\sigma(t)\leq\sigma(a), \quad t>a$$

$$\sigma(t)\leq\sigma(a)e^{\int_a^t g(s)ds}, \quad t>a$$

• πρόχειρο:

$$y_1'=f(t,y_1)$$
$$y_2'=f(t,y_2)$$

$$\Rightarrow (y_1-y_2)'=f(t,y_1)-f(t,y_2)$$

αν όμως θέσω:

$$\sigma(t)=(y_1-y_2)^2$$

$$\Rightarrow p>T: |y_1(t)-y_2(t)|^p$$

Τότε,

$$\sigma'(t)=2(y_1(t)-y_2(t))(y_1'-y_2')$$
$$=2(y_1(t)-y_2(t))(f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t)))$$
$$\leq 2|y_1-y_2|\cdot L\cdot|y_1-y_2|$$
$$=2L\sigma, \quad t>t_0$$
$$\to \sigma(t_0)=0$$

Απόδειξη: (Θεωρήματος)

Έστω, y_1, y_2 δύο διακεκριμένες λύσεις στο $[a, b]$ και θέτουμε $\sigma(t) = (y_1(t) - y_2(t))^2$, $t \in [t_0, b]$.

Τότε η $\sigma : [t_0, b]$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(t_0, b]$ και μάλιστα

$$\sigma'(t) = 2(y_1(t) - y_2(t))(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) \quad , t \in [t_0, b]$$

$$|y_1(t)| \leq M_1 \quad , t \in [t_0, b]$$

$$|y_2(t)| \leq M_2 \quad , t \in [t_0, b]$$

$$M = \max(M_1, M_2)$$

Τότε, η $f : [t_0, b] \times [-M, M] \to \mathbb{R}$, ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, $\exists$ $L > 0$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad , t \in [t_0, b] \ , x, y \in [-M, M]$$

$$\Rightarrow |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1(t) - y_2(t)| \quad , t \in [t_0, b].$$

Οπότε,

$$\sigma'(t) \leq 2|y_1(t) - y_2(t)||f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|$$

$$\leq L|y_1(t) - y_2(t)|$$

$$= 2L\sigma(t) \quad , t_0 < t \leq b.$$

Από Λήμμα Gronwall,

$$0 \leq \sigma(t) \leq \sigma(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} 2L\,ds}$$

$$= \sigma(t_0) e^{2L(t - t_0)} = 0 \ , \quad t_0 < t \leq b$$

$\Rightarrow \sigma(t) \equiv 0 \quad , t \in [t_0, b] \quad$, Αντίφαση! ■

Θεώρημα: (Peano)
Έστω $f: [\alpha, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ συνεχής, με $|f(t,y)| \leq M$.
Τότε το Π.Α.Τ,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \alpha < t_0 \leq t \leq b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

με $y_0 \in (c, d)$.
Το πρόβλημα έχει λύση στο $[t_0, b^*]$, όταν
$b^* = \min\left(b, t_0 + \frac{d - y_0}{M}, t_0 + \frac{y_0 - c}{M}\right)$.

$\sigma(t) \leq \sigma(\alpha) + \int_\alpha^t g(s)\sigma(s)ds, t \in [\alpha, b]$

Αν $g: [\alpha, b] \to (0, +\infty)$

$\Rightarrow \sigma(t) \leq \sigma(\alpha) e^{\int_\alpha^t g(s)ds}$

- Αν $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη
$\Rightarrow \exists\, n_k, \alpha_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} \alpha$.

- Αν $f_k: [\alpha, b] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ συνεχείς συναρτήσεις,

i) ομοιόμορφα φραγμένη, $\exists\, M > 0$ τ.ω

$$|f_k(x)| \leq M \quad , \forall x \in [\alpha, b] \quad , \forall k \in \mathbb{N}.$$

ii) Ισοσυνέχεια,
$\forall \varepsilon > 0 \quad , \exists\, \delta > 0$ τ.ω

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα: (Arzela - Ascoli)

Εάν $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τ.ω $f_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής,

Τότε $\exists$ n_k τ.ω $f_{n_k} \to f$ ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$ $k \to \infty$.