17/10/23

Ισοσυνέχεια:

→ Έστω $f_n:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $f_n\in C[\alpha,\beta]$

→ $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\xrightarrow{B.W}$ $\exists\ \alpha_{n_k}$ συγκλίνουσα υπακολουθία

• $\left.\begin{array}{l} y'(t)=f(t,y(t)) \quad , t>t_0 \\ y(t_0)=y_0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow y(t)=y_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$

Είχαμε επίσης δει την αναδρομική ακολουθία:

$$y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))ds \quad \text{και} \quad y_1(t)\equiv y_0$$

Αν $|f(t,y)|\leq M$, $t\in[\alpha,\beta]$, $y\in[c,d]$ και $[t_0,\beta^*]$ όπου $\beta^*=\min\left(\beta, t_0+\frac{d-y}{M}, t_0+\frac{y_0-c}{M}\right)$. Προφανώς θα έχουμε ότι, $c\leq y_n(t)\leq d$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ στο $[t_0,\beta^*]$.
Οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται.
Αφού,

i) ομοιόμορφα φραγμέν

ii) Ισοσυνέχεια,

$$|y_{n+1}(t)-y_{n+1}(s)| = \left|\int_s^t f(\xi, y_n(\xi))\right|$$

$$\leq \int_s^t |f(\xi, y_n(\xi))| d\xi$$

$$\leq M|t-s| \quad , \forall n=1,2,\dots$$

Απο Θεώρημα Arzela-Ascoli:

$\exists\ n_k,\ \exists\ y \in C[t_0, 6^*]$ τ.ω $y_{n_k} \to y$ ομοιόμορφα, $k\to\infty$

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_k(s))ds$$

Οπότε, $f(t, y_{n_k}(t)) \xrightarrow{k\to\infty} f(t, y(t))$ ομοιόμορφα.

Άρα,

$$\int_{t_0}^t f(s, y_n(s))ds \longrightarrow \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$$

$\Longrightarrow \{y_{n_k+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

- Αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$$

Τότε θα είχαμε,

$$\longrightarrow y_{n_k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n_k}(s))\,ds$$

$$\longrightarrow y_{n_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n_k-1}(s)) \quad , \ t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow |y_{n_k+1}(t) - y_{n_k}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, y_{n_k}(s)) - f(s, y_{n_k-1}(s)))\,ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n_k}(s)) - f(s, y_{n_k-1}(s))|\,ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |y_{n_k}(s) - y_{n_k-1}(s)|\,ds$$

$$\Longrightarrow \sigma_{k+1}(t) = |y_{n_k+1}(t) - y_{n_k}(t)|$$

$$\sigma_{k+1}(t) \leq L \int_{t_0}^{t} \sigma_k(s)\,ds$$

για $k=1$, $\quad \sigma_2(t) \leq L \int_{t_0}^{t} \sigma_1(s)\,ds \leq L\mu(t-t_0) \quad , \ |\sigma_1(t)| \leq \mu$

$$\sigma_3(t) \leq L\int_{t_0}^{t} \sigma_2(s)ds$$

$$\leq L\int_{t_0}^{t} LM(s-s_0)ds$$

$$= ML^2 \frac{(t-t_0)^2}{2}$$

Επαγωγικά,

$$\sigma_k(t) \leq M \frac{(L(t-t_0))^{k-1}}{(k-1)!} \leq M \frac{(L(b^*-t_0))^{k-1}}{(k-1)!}$$

- $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow \frac{x^k}{k!} \to 0$

Θεώρημα: (Peano)

Έστω $f:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, συνεχής με $|f(t,y)| \leq M$ $\forall y \in [c,d]$, $t \in [a,b]$.

Τότε το Π.Α.Τ,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad b \geq t > t_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

έχει λύση στο διάστημα $[t_0, b^*]$, όπου $b^* = \min\left(b, t_0 + \frac{y_0 - c}{M}, t_0 + \frac{d-y_0}{M}\right)$, για $c < y_0 < d$.

Απόδειξη: (Torelli)

Για $n\in\mathbb{N}$, ορίζουμε την αναδρομική ακολουθία

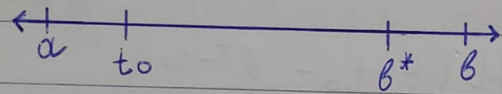
$$y_n(t)=y_0 \quad , \quad t\in\left[t_0,\ t_0+\frac{b^*-t_0}{n}\right]$$

Η αναδρομική ακολουθία y_n θα οριστεί στα υπόλοιπα σημεία ως:

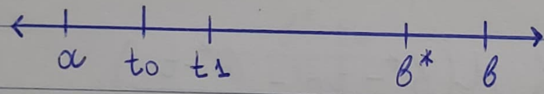
$$y_n(t):=y_0+\int_{t_0}^{t-\frac{b^*-t_0}{n}} f(s,y_n(s))\,ds \quad , \quad t\in\left[t_0,\ t_0+\frac{b^*-t_0}{n}\right]$$

$$t_0+\frac{b^*-a}{n}\leq t\leq b^*$$

Για $n=1$:

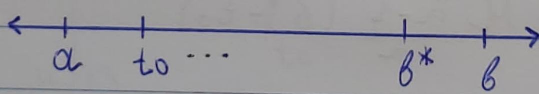


Για $n=2$:



$$t_1=t_0+\frac{b^*-t_0}{2}$$

Για $n=3$:

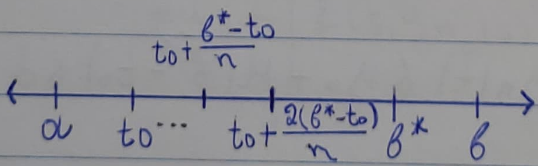


κατά στάδιο

$$t_a=t_0+\frac{k(b^*-t_0)}{n}$$

⋮

Για n:



Τότε,
$$\int_{t_0}^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,y_n(s))\,ds=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_0+(k-1)\frac{b^*-t_0}{n}}^{t_0+k\frac{b^*-t_0}{n}} f(s,y_n(s))\,ds$$

$$=\int_{t_0}^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,y_0)\,ds$$

Η ακολουθία y_n ορίζεται καλά,
Διότι, $c \leq y_n(t) \leq d$, $t \in [t_0, b^*]$ και $\left[t_0, t_0 + \frac{b^*-a}{n}\right]$

Αν πάρουμε τη διαφορά με $t_0 + \frac{b^*-a}{n} \leq t \leq b^*$ τότε,

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t-\frac{b^*-t_0}{n}} f(s, y_n(s)) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_0-\frac{b^*-t_0}{n}} |f(s, y_n(s))| ds$$

$$\leq M\left(t - t_0 - \frac{b^*-t_0}{n}\right)$$

$$\leq M\left(b^* - t_0 - \frac{b^*-t_0}{n}\right)$$

$$= M \frac{n-1}{n}(b^*-t_0)$$

$$\leq M(b^*-t_0)$$

$$c \leq y_0 - M(b^*-t_0) \leq y_n(t) \leq y_0 + M(b^*-t_0) \leq d$$

$$\Rightarrow \quad y_0 + M(b^*-t_0) \leq d$$

$$b^* - t_0 \leq \frac{d-y_0}{M}$$

$$b^* \leq t_0 + \frac{d-y_0}{M}$$

Επίσης η $\{y_n\}$ πληρεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Arzela-Ascoli με $c \leq y_n(t) \leq d$ και ομοιόμορφη συνέχεια με $t, s \geq t_0 + \frac{b^*-a}{n}$,

$$y_n(t) - y_n(s) = \int_{s-\frac{b^*-t_0}{n}}^{t-\frac{b^*-t_0}{n}} f(\xi, y_n(\xi))\, d\xi$$

$$\Longrightarrow |y_n(t) - y_n(s)| \leq M\, |t-s| \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Οπότε, από Arzela-Ascoli,

$$\exists\ y_n \to y \text{ ομοιόμορφα στο } [t_0, b^*].$$

Ας θυμηθούμε ότι η αναδρομική σχέση μας ήταν η

$$\underbrace{y_{n_k}(t)}_{\downarrow\, y(t)} = y_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{b^*-t_0}{n_k}} f(s, y_{n_k}(s))\, ds$$

$$= y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(s, y_{n_k}(s))\, ds}_{\downarrow\ y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds} - \underbrace{\int_{t-\frac{b^*-t_0}{n_k}}^{t} f(s, y_{n_k}(s))\, ds}_{:= a_k}$$

Άρα,

$$|\alpha_k| = \left| \int_{t-\frac{b^*-t_0}{n}}^{t} f(s, y_{n_k}(s))ds \right|$$

$$\leq \int_{t-\frac{b^*-t_0}{n}}^{t} |f(s, y_{n_k}(s))| ds$$

$$\leq \mu \frac{(b^*-t_0)}{n_k}.$$

Θεώρημα:

Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής όπου D ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^2$ και $(t_0, y_0) \in D$.
Τότε το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

έχει λύση σε ένα μεγιστικό διάστημα της μορφής $t_0 \in (\alpha, b)$. Ένα απο τα ακόλουθα αληθεύει.

i) Η λύση, ορίζεται $\forall t \in \mathbb{R}$ $(t, y(t)) \in D$, $\forall t \in \mathbb{R}$

ii) Το μεγιστικό διάστημα είναι της μορφής $t_0 \in (\alpha, +\infty)$ και $(t, y(t)) \in D$, $\forall t > \alpha$.

Τι συμβαίνει στο α; :
- (I): το $(\alpha, y(\alpha)) \in \partial D$
- (II): $(\alpha, y(\alpha)) \in D$. Στο α έχουμε έκρηξη λύσης. $\left(\lim_{t \to \alpha^+} |y(t)| = +\infty\right)$

iii) Το μεγιστικό διάστημα είναι της μορφής $(-\infty, b) \ni t_0$.
$((t, y(t)) \in D \quad , \forall\, t < b)$.

Τότε, είτε, $(b, y(b)) \in \partial D$
είτε, αν $(b, y(b)) \in D$

και $\limsup_{t \to b^-} |y(t)| = +\infty$

iv) Το μεγιστικό διάστημα είναι $(a, b) \ni t_0$.

Λήμμα Gronwall: (Για την Ολοκληρωτική μορφή)

Έστω $\sigma : [t_0, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $g : [t_0, b] \to (0, +\infty)$ και

$$\sigma(t) \leq \sigma(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sigma(s) g(s) ds \quad , t \in [t_0, b]$$

Άρα, $\sigma(t) \leq \sigma(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} g(s) ds}$.

19/10/23

Θεωρήματα Σύγκρισης:

Θεώρημα:

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και έστω $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ παραγωγίσιμες στο $(a, b]$, που ικανοποιούν:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , a < t \leq b$$
$$x'(t) \leq f(t, x(t)) \quad , a < t \leq b$$

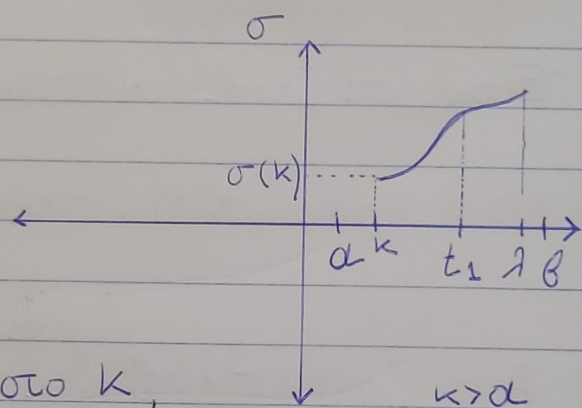
$\sigma(\alpha)\leq 0$
$\Uparrow$

Εάν $x(\alpha)\leq y(\alpha)$, τότε θα ισχύει $x(t)\leq y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:
(Επαγωγή σε Άτοπο)

Έστω $\exists\, t_1\in(\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $x(t_1)>y(t_1)$.
Θέτουμε $\sigma(t)=x(t)-y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$,
Επειδή το $\sigma(t_1)>0$.
Οπότε, απο συνέχεια $\exists\, t_1\in(\kappa,\lambda)\subset[\alpha,\beta]$ με την ιδιότητα, $\sigma(t)>0$, $\forall\, t\in(\kappa,\lambda)$.
Παίρνουμε το μεγαλύτερο δυνατό.
Τι γίνεται στο κ;

$$\Rightarrow \lim_{t\to\kappa^+}\sigma(t)\geq 0$$



Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\sigma(\kappa)=0$.
Έστω ότι $\sigma(\kappa)>0$,
Απο τη συνέχεια της σ στο κ,

$$\exists\, \delta>0 \text{ τ.ω } \sigma(t)>0,\ t\in(\kappa-\delta,\lambda)$$

Αντίφαση!

Επομένως, $\sigma(\kappa)=0$.

$$\sigma(t)>0,\ t\in(\kappa,\lambda)\subset[\alpha,\beta].$$

Επιπρόσθετα για τη σ, έχουμε

$$\sigma'(t)=x'(t)-y'(t)\leq f(t,x(t))-f(t,y(t)).\quad (*)$$

Αν, $m\leq x(t)\leq \mu$, $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$.
$m\leq y(t)\leq \mu$

Θα $\exists\ L>0$ τ.ω.

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq L|x-y| \quad , \quad t\in[\alpha,\beta]\times[m,\mu]$$

Οπότε η (*) γίνεται

$$\sigma'(t)=x'(t)-y'(t)\leq f(t,x(t))-f(t,y(t))$$

$$\leq L|x(t)-y(t)|$$
$$=L|\sigma(t)|$$
$$=L\sigma(t) \quad , t\in[\kappa,\lambda)$$

$$\Rightarrow \sigma'(t)\leq L\sigma(t) \quad , t\in(\kappa,\lambda)$$

Απο λήμμα Gronwall,

$$0<\sigma(t)\leq \underbrace{\sigma(\kappa)}_{=0}e^{L(t-\kappa)} \quad , \quad t\in(\kappa,\lambda)$$

Αντίφαση! ■

Πόρισμα 1:

Έστω f συνεχής, τοπικά Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή,

$$y'(t)=f(t,y(t)) \quad , t\in(\alpha,\beta)$$
$$x'(t)>f(t,x(t)) \quad , t\in(\alpha,\beta)$$

Εάν $x(\alpha)\geq y(\alpha)$, τότε $x(t)\geq y(t) \quad , \forall t\in[\alpha,\beta]$.

Πόρισμα 2:

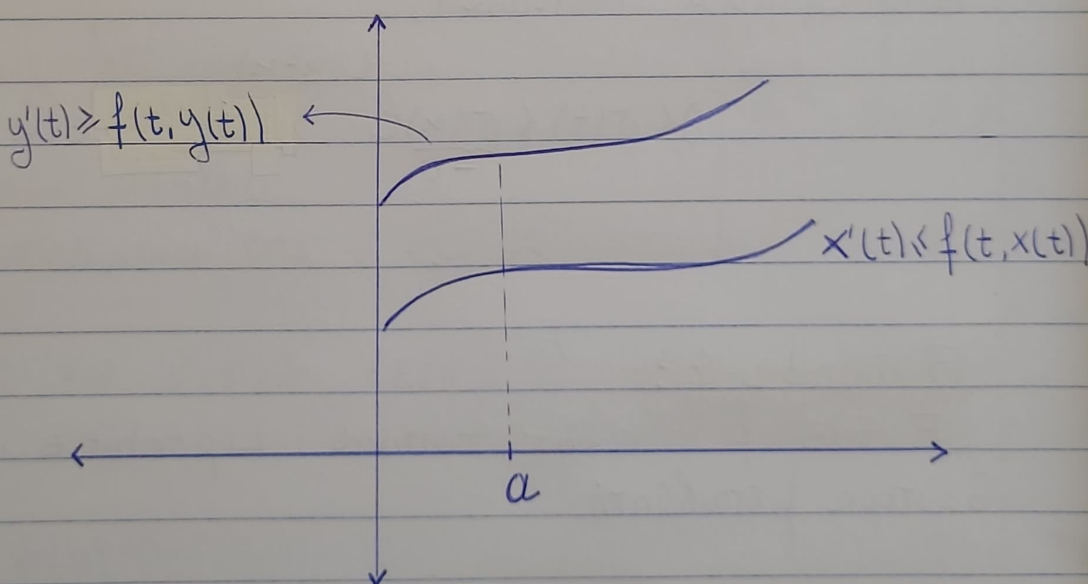
Ίδιες υποθέσεις στην f ($f \in C$ και τοπικά Lipschitz) και $x, y \in C[\alpha, b]$, παραγωγίζουμε στο (α, b) τ.ω

$$x'(t) \leq f(t, x(t)) \quad , t \in (\alpha, b)$$
$$y'(t) \geq f(t, y(t)) \quad , t \in (\alpha, b)$$

Εάν $y(\alpha) \geq x(\alpha)$, τότε $y(t) \geq x(t)$, $\forall\, t \in [\alpha, b]$ ■

→ Αν καλέσουμε ουσιαστικά: $\sigma(t) = x(t) - y(t)$

$$\sigma'(t) \leq x'(t) - y'(t)$$
$$\leq f(t, x(t)) - f(t, y(t))$$
$$\leq L|\sigma(t)|$$



→ Εάν $z'(t) = f(t, z(t))$

$x(\alpha) \leq z(\alpha) \leq y(\alpha)$

Η λύση ορίζεται, $\forall\, t \in [\alpha, b]$ και μάλιστα $x(t) \leq z(t) \leq y(t)$.

Θεώρημα:

Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \times [m, M]$ τ.ω $f(t,x) \leqslant g(t,x)$, $\forall (t,x)$.
Εάν $x, y \in C[\alpha,\beta] \cap D(\alpha,\beta)$ που ικανοποιούν

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , t \in (\alpha, \beta)$$
$$y'(t) = g(t, y(t)) \quad , t \in (\alpha, \beta)$$

με την g ή f να ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και

Απόδειξη:

Έστω, $x'(t) = f(t, x(t)) \quad , t \in (\alpha, \beta)$
$y'(t) = g(t, y(t)) \quad , t \in (\alpha, \beta)$

Εάν, $x(\alpha) \leqslant y(\alpha) \Longrightarrow x(t) \leqslant y(t) \quad , \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$f(t,x) \leqslant g(t,x)$$

$$\Longrightarrow f(t, y(t)) \leqslant g(t, y(t)) = y'(t)$$
$$y'(t) \geqslant f(t, y(t))$$
$$x'(t) = f(t, x(t))$$
$$x(\alpha) \leqslant y(\alpha)$$
$$y'(t) \geqslant f(t, y(t))$$

Εάν $y(\alpha) \geqslant x(\alpha) \Longrightarrow y(t) \geqslant x(t)$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. ∎