24/10/23

Θεώρημα: (λίγο διαφορετικά διατυπωμένο).

Ίδιες υποθέσεις στην f και $x, z \in C[\alpha,\beta) \cap D(\alpha,\beta)$ που ικανοποιούν:

$$x'(t) \leq f(t, x(t)) \quad , \quad t \in (\alpha, \beta)$$

$$z'(t) \geq f(t, z(t)) \quad , \quad t \in (\alpha, \beta)$$

Εάν $x(\alpha) \leq z(\alpha)$, τότε $x(t) \leq z(t)$, $\forall t \in [\alpha, \beta)$.

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$x(\alpha) \leq y(\alpha) \leq z(\alpha)$$

$\blacksquare$

Ερώτημα: Εξάρτηση λύσεων από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Θεώρημα:

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και έστω

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t))$$
$$y_1(\alpha) = C_1$$

και

$$y_2'(t) = f(t, y_2(t))$$
$$y_2(\alpha) = C_2$$

λύσεις με μεγιστικά διαστήματα $[\alpha, T_1)$, $[\alpha, T_2)$ αντίστοιχα.

Έστω $[\alpha, \beta] \subseteq [\alpha, T_1) \cap [\alpha, T_2)$ και έστω

$$m \leq y_1(t) \leq M$$
$$m \leq y_2(t) \leq M$$

και L τ.ω $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$, $t \in [\alpha, \beta]$, $x, y \in [m, M]$

Τότε,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |C_1 - C_2| e^{L(t-\alpha)}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Απόδειξη:

Έστω, $\sigma(t) = (y_1(t) - y_2(t))^2$, $t \in [\alpha, b]$.
Τότε,

$$\sigma'(t) = 2(y_1(t) - y_2(t))(y_1'(t) - y_2'(t))$$

$$= 2(y_1(t) - y_2(t))(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))$$

$$\leq 2L(y_1(t) - y_2(t))^2$$

$$= 2L\sigma(t) \quad , \alpha \leq t \leq b$$

Από Λήμμα Gronwall,

$$\sigma(t) \leq \sigma(\alpha) e^{2L(t-\alpha)} \quad , \alpha \leq t \leq b$$

$$\Longrightarrow \quad (y_1(t) - y_2(t))^2 \leq (c_1 - c_2)^2 e^{2L(t-\alpha)} \quad , \alpha \leq t \leq b.$$

$\blacksquare$

Πόρισμα:

Ίδιες υποθέσεις για την f όπως πριν και y η λύση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , (\alpha, T)$$
$$y(\alpha) = c$$

με $[\alpha, T)$ το μεγιστικό διάστημα της λύσης.
Έστω, $[\alpha, b] \subset [\alpha, T]$.
Τότε, $\exists\ \delta > 0$ ώστε η λύση

$$z'(t) = f(t, z(t))$$
$$z(\alpha) = c'$$

να ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ όταν $|c-c'| < \delta$.
Επιπρόσθετα,

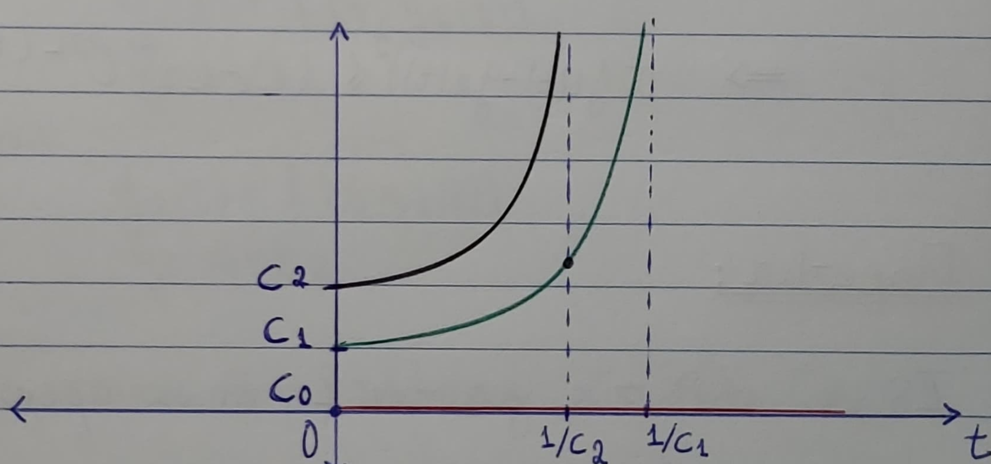
$$\exists\ L>0 \text{ τ.ω } |y(t)-z(t)| \leq |c-c'|e^{L(t-\alpha)}, \quad t\ [\alpha, \beta]$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω $c>0$:

$$y'(t) = y^2(t), \quad t>0$$
$$y(0) = c$$

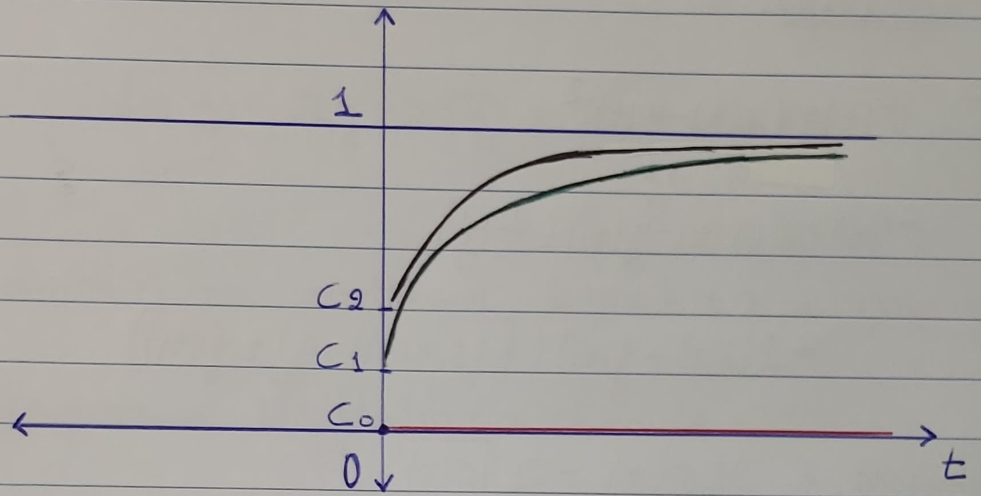
λύση: $y = \dfrac{1}{\frac{1}{c}-t}$, $\underbrace{0 \leq t < \frac{1}{c}}_{\text{μεγιστικό διάστημα}}$



<u>Παράδειγμα:</u>

$$y'(t) = y(t)(1-y(t))$$
$$y(0) = c, \quad 0<c<1$$

λύση: $y(t) = \dfrac{\frac{1}{1-c}\cdot e^t}{1+\frac{1}{1-c}e^t}$



$y_0(t) \equiv 0 \quad , t \geq 0$

$y_c(t) \quad , 0 < c < 1$

$\forall\, c \in [\varepsilon, 1]$, y_c συνεχής εξάρτηση στο $[0,+\infty)$.

VIP!

Θεώρημα: (*)

Έστω , $f, g : [\alpha, \beta] \times [m, \mu] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και η f Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή τ.ω

$$|f(x,y) - g(x,y)| \leq \varepsilon \qquad , x \in [\alpha, \beta], y\, [m, \mu]$$

Επίσης,
$$x'(t) = f(t, x(t))$$
$$x(\alpha) = c$$

και
$$y'(t) = g(t, y(t))$$
$$y(\alpha) = c$$

Ακόμη, $m \leq x(t) \leq \mu$ και $m \leq y(t) \leq \mu$

Τότε,
$$|x(t) - y(t)| \leq |c_1 - c_2| e^{L(t-\alpha)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-\alpha)} - 1\right), t \in [\alpha, \beta]$$

με $[\alpha, \beta] \subseteq D_y$:= μεγιστικό διάστημα της y.

$[\alpha, \beta] \subseteq D_x$:= μεγιστικό διάστημα της x.

Πρόχειρο:

$$\sigma(t) = (x(t) - y(t))^2$$

$$\sigma'(t) = 2(x(t) - y(t))(x' - y')$$

$$= 2(x(t) - y(t))(f(t, x(t)) - g(t, y(t)))$$

$$\leq 2L\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)}$$

αφού, $|f(t, x(t)) - g(t, y(t))| \leq |f(t,x) - f(t,y)| + |f(t,y) - g(t,y)|$

$$\leq L|x-y| + \varepsilon.$$

vip!

Λήμμα:

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\sigma : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty)$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (α, β) τ.ω

$$\sigma'(t) \leq 2L\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)} \quad , t \in (\alpha, \beta)$$

Τότε,

$$\underbrace{\sqrt{\sigma(t)} \leq \sqrt{\sigma(\alpha)}\, e^{L(t-\alpha)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-\alpha)} - 1\right)}_{\text{απο μη-γραμμικότητα:}} \quad , t \in [\alpha, \beta]$$

$$\leq |C_1 - C_2| e^{L(\beta-\alpha)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(\beta-\alpha)} - 1\right)$$

Απόδειξη:

Θεωρώ την $\sigma_\delta(t) = \sigma(t) + \delta$.

Τότε η σ_δ ικανοποιεί την

$$\sigma_\delta'(t) = \sigma'(t)$$
$$\leq 2L\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)}$$
$$\leq \underbrace{2L\sigma_\delta(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma_\delta(t)}}_{\text{μη-γραμμικότητα}}$$

Τότε, $\sigma_\delta : [\alpha, \beta] \to [\delta, +\infty)$.

$$f(t,y) = 2Ly + 2\varepsilon\sqrt{y} \quad , t \in [\alpha, \beta]$$
$$, y \in [\delta, +\infty)$$
$$[\delta, \mu]$$

Η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y στο $[\delta, \mu]$.

Απο Συγκριτικά Θεωρήματα έχουμε

$$\sigma_\delta(t) \leq y_\delta(t)$$

Όταν y_δ είναι η λύση:

$$y_\delta'(t) = 2Ly_\delta(t) + 2\varepsilon\sqrt{y_\delta(t)}$$
$$y_\delta(\alpha) = \sigma(\alpha) + \delta$$

Οπότε,

$$y' = 2Ly(t) + 2\varepsilon\sqrt{y(t)}$$
$$y(\alpha) = \sigma(\alpha) + \delta > 0 \quad , y(t) \geq \delta$$

Αν, $\sqrt{y(t)} = Q(t) \Rightarrow y(t) = Q^2(t)$

Τότε,

$$2Q(t)Q'(t) = 2LQ^2(t) + 2\varepsilon Q(t)$$
$$Q'(t) = LQ(t) + \varepsilon$$

πολ/ζω με $e^{-Lt} \Longrightarrow e^{-Lt}Q'(t) - Le^{-Lt}Q(t) = \varepsilon e^{-Lt}$

$$\left(e^{-Lt}Q(t)\right)' = \left(-\frac{\varepsilon}{L}e^{-Lt}\right)'$$

$$\left(e^{-Lt}Q(t) + \frac{\varepsilon}{L}e^{-Lt}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow e^{-Lt}Q(t) + \frac{\varepsilon}{L} e^{-Lt} = e^{-La}Q(a) + \frac{\varepsilon}{L} e^{-La}$$

$$Q(t) = e^{L(t-a)}Q(a) + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

$$\sqrt{y(t)} = \sqrt{y(a)}\, e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

$$\overset{\sqrt{\sigma(t)}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{\sigma(t)+\delta} \leq \sqrt{\sigma(a)+\delta}\; e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

$$\sigma_\delta(t) \leq y_\delta(t)$$

$\blacksquare$

Απόδειξη: (*)

Θέτουμε,

$$\sigma(t) = (x(t) - y(t))^2 \quad , a < t < b$$

$$\sigma'(t) = 2\,(x(t) - y(t))(x'(t) - y'(t))$$

$$= 2\,(x(t) - y(t))\,(f(t, x(t)) - g(t, y(t)))$$

$$= 2(x(t) - y(t))\,(f(t, x(t)) - f(t, y(t)) + f(t, y) - g(t, y))$$

$$= 2(x(t) - y(t))\,(f(t, x(t)) - f(t, y(t)))$$

$$+ 2(x(t) - y(t))\,(f(t, y(t)) - g(t, y(t)))$$

$$\leq 2L\,(x(t) - y(t)) + 2|x(t) - y(t)|\,|f(t,y) - g(t,y)|$$

$$\leq 2L\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)} \quad , t \in (a, b)$$

Απο προηγούμενο λήμμα,

$$\Longrightarrow \sqrt{\sigma(t)} \leqslant \sqrt{\sigma(\alpha)}\, e^{L(t-\alpha)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-\alpha)} - 1\right)$$

■

- $y(t, c') \xrightarrow{i} y(t, c)$

Ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή του μεγιστικού διαστήματος της $y(\cdot, c)$.

26/10/23

Πόρισμα:

Εστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής, τοπικά Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και $f_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω $f_k \to f$ για $k \to \infty$ ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta] \times [m, M]$ με $\alpha < \beta$ και $m < M$.
Εστω, επιπλέον y η λύση:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad , \ t > \alpha \\ y(\alpha) &= c \end{aligned}$$

που ορίζεται στο μεγιστικό διάστημα $[\alpha, T)$.
Θεωρούμε το διάστημα $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, T)$ και y_k λύση του

$$\begin{aligned} y_k'(t) &= f_k(t, y_k(t)) \quad , \ \alpha < t \\ y_k(\alpha) &= c_k \end{aligned}$$

με $[\alpha, T_k)$ το μεγιστικό διάστημα.
Εάν $c_k \to c$, τότε $\exists$ $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $[\alpha, \beta] \subseteq [\alpha, T_k)$, $\forall k \geqslant k_0$,

και $y_k \longrightarrow y$ ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$, για $k \to +\infty$.

VIP!: πιο ισχυρό είναι να πω: f είναι $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Θεώρημα:

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |(x-y)| \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right|$$

Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχείς, η f είναι τοπικά Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και y η λύση του:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \alpha < t \\ y(\alpha) = c_0 \end{cases}$$

με $[\alpha, T)$, το μεγιστικό διάστημα της λύσης.

Τότε η λύση $y(t, c')$ επιλέγοντας $[\alpha, \beta] \subseteq [\alpha, T)$ ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ αν $|c' - c_0|$ είναι κατάλληλα μικρό.

Η συνάρτηση $y(t, c)$, είναι παραγωγίσιμη ως προς c.

$$Z(t,c) = \frac{\partial}{\partial c} y(t,c) \quad , \quad \forall\ [\alpha, \beta] \subseteq [\alpha, T)$$

και λύνει το εξής γραμμικό πρόβλημα:

$$Z_t(t,c) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t,c))\, Z(t,c)$$

$$Z(\alpha, c) = 1$$

με μεγιστικό πεδίο ορισμού το $[\alpha, T)$.

Απόδειξη: (πολύ συνοπτικά) (σκέψη ουσιαστικά)

$$y(t,c) = c + \int_\alpha^t f(s, y(s,c))\, ds$$

$$y(t,c') = c' + \int_{\alpha}^{t} f(s, y(s,c'))\, ds$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και διαιρώντας με τον όρο $(c-c')$ παίρνω ότι:

$$\Rightarrow \quad \frac{y(t,c) - y(t,c')}{c-c'} = 1 + \int_{\alpha}^{t} \frac{(f(s,y(s,c)) - f(s,y(s,c'))}{c-c'}\, ds$$

$(*)$

$$\frac{d}{dt}\left(f(s, ty_1 + (1-t)y_2)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(s, ty_1 + (1-t)y_2\right)(y_1 - y_2)$$

Ολήντας το τώρα το πιο πάνω έχω ότι:

$$f(s,y_1) - f(s,y_2) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f(s, ty_1 + (1-t)y_2)\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(s, ty_1 + (1-t)y_2\right)(y_1 - y_2)$$

Οπότε,

$$(*) = 1 + \int_{\alpha}^{t}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(s, \tau y(s,c) + (1-\tau) y(s,c)\right)$$

Δηλαδή αν,

$$\theta(t,c,c') = 1 + e^{\int_{\alpha}^{t}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(s, \tau y_1 + (1-\tau) y(s,c))}$$

Το $\tau \cdot y(s,c) + (1-\tau) y(s,c') \xrightarrow{c' \to c} y(s,c)$ ομοιόμορφα. ■