31/10/23

Διανυσματικές Διαφορικές Εξισώσεις:

- Γραμμικές ανώτερης τάξης:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + a_2(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t)$$

Καλούμε ανάλογα με την τάξη,

$$y_1(t) = y(t) \Rightarrow y_1'(t) = y'(t)$$
$$y_2(t) = y'(t) = y_1'(t)$$
$$y_3(t) = y''(t) = y_2'(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \longrightarrow y_n'(t) = y^{(n)}(t)$$

Αν $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$

Τότε, $\vec{y}'(t) = (y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_n'(t))$

$$= (y_2(t), y_3(t), \ldots, y_n(t), y_n'(t))$$

$$= (y_2, y_3, \ldots, -a_1(t)y_n(t) - a_2(t)y_{n-1}(t) - \cdots - a_n(t)y_1(t) + f(t))$$

Οπότε,

$$\vec{y}'(t) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ n-1 \text{ γραμμή} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \vec{f}(t)$$

όπου,

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

Οπότε το ανωτέρω μετασχηματίζεται ως εξής:

$$y_1(t) = y(t)$$
$$y_2(t) = y'(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

και άρα,

$$\boxed{\vec{y}\,'(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$$

• Η νέα μορφή της διαφορικής εξίσωσης στη διανυσματική της μορφή.

Οπότε, το ΠΑΤ το οποίο προκύπτει και θα μας απασχολήσει είναι το:

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) & , t > t_0 \\ \vec{y}(t_0) = \vec{C} \end{cases}$$

- Βασικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν:

1) Ύπαρξη λύσης
2) Μεγιστικό διάστημα λύσης
3) Μονοσήμαντο λύσεων
4) Εξάρτηση λύσεων απο παραμέτρους.

Θεώρημα: (Peano)

Έστω $\vec{f} \in C(\mathbb{R}^{n+1})$, τότε το Π.Α.Τ

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \quad , t > t_0$$
$$y(t_0) = \vec{C} \quad ,$$

έχει τοπική λύση, που ορίζεται σε ένα μεγιστικό διάστημα της μορφής $[t_0, T)$.
Εάν $T < +\infty$ τότε,

$$\limsup_{t \to T^-} \|\vec{y}(t)\| = +\infty$$

$\hookrightarrow$ αυτό σημαίνει ότι μια συνιστώσα εκρήγνυται.

Για το μονοσήμαντο:
Η $\vec{f}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, αν $[\alpha,\beta]\times[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]\times\cdots\times[c_n,d_n]$,

$$\exists\ L>0 \quad \text{τ.ω} \quad \|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{y})\| \leq L\|\vec{x}-\vec{y}\|, \ \forall t\in[\alpha,\beta], \ \forall \vec{x},\vec{y}\in\prod_{i=1}^{n}[c_i,d_i]$$

Θεώρημα:

Αν η $\vec{f}\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, και ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz, ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, Τότε ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων στο Π.Α.Τ

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t,\vec{y}(t)), & t>t_0 \\ \vec{y}(t_0)=\vec{c} \end{cases}$$

Απόδειξη:

Εστω $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ δύο διακεκριμμένες λύσεις με μεγιστικά διαστήματα $[t_0,T_1), [t_0,T_2)$, αντίστοιχα.
Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$\sigma(t) = \|\vec{y}_1(t)-\vec{y}_2(t)\|^2, \quad t\in[t_0,\beta]\subset[t_0,T_1)\cap[t_0,T_2)$$

$$= \langle \vec{y}_1(t)-\vec{y}_2(t), \vec{y}_1(t)-\vec{y}_2(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \sigma(t) = 2\langle \vec{y}_1'(t)-\vec{y}_2'(t), \vec{y}_1(t)-\vec{y}_2(t)\rangle$$

$$= 2\langle \vec{f}(t,\vec{y}_1(t) - \vec{f}(t,\vec{y}_2(t), \vec{y}_1(t)-\vec{y}_2(t)\rangle$$

$$\leqslant 2 \| \vec{f}(t, \vec{y}_1(t)) - \vec{f}(t, \vec{y}_2) \| \, \| \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \|$$

$$\leqslant 2L \| \vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t) \|^2$$

$$= 2L\sigma(t)$$

Απο λήμμα Gronwall,

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \sigma(t) \leqslant \sigma(t_0) e^{2L(t-t_0)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(t) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y}_1(t) \equiv \vec{y}_2(t).$$ Αντίφαση.

■

Θεώρημα:

Έστω $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, για την οποία $\exists \, A, B > 0$ τ.ω

$$\| \vec{f}(t, \vec{x}) \| \leqslant A + B \| \vec{x} \| \quad , \forall \, t \in \mathbb{R}, \ \forall \, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Τότε, το μεγιστικό διάστημα κάθε λύσης του

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{c} \end{cases}$$

είναι το $\mathbb{R}$.

■

- **Παρατήρηση:**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t < 0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

Αν καλέσω,

$$y(t) = x(s) \quad , t<0$$

Για $s=-t \Rightarrow y'(t) = \dot{x}(s) \cdot \frac{ds}{dt}$

$$= -\dot{x}(s)$$

$$-\dot{x}(s) = f(-s, x(s)) \quad , s>0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(s) = -f(-s, x(s))$$

$$x(0) = C$$

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει η λύση με μεγιστικό διάστημα στο $[t_0, T)$.
Αν $T<+\infty$, τότε απο το Θεώρημα,

$$\limsup_{t \to T^-} \|\vec{y}(t)\| = +\infty$$

Θέτουμε, $\sigma(t) = \|\vec{y}(t)\|^2 \quad , t \in [t_0, T)$

Τότε,

$$\sigma'(t) = 2 \langle \vec{y}'(t), \vec{y}(t) \rangle$$

$$= 2 \langle \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \vec{y}(t) \rangle$$

$$\leq 2 \|\vec{f}(t, \vec{y}(t))\| \cdot \|\vec{y}(t)\|$$

$$\leq 2(A + B|\vec{y}(t)|) \|\vec{y}(t)\|$$

$$= 2A\|\vec{y}(t)\| + 2B\|\vec{y}(t)\|^2$$

$$= 2A\sqrt{\sigma(t)} + 2B\sigma(t) \quad , t > t_0$$

Σύμφωνα με τη θεωρία των Συγκριτικών Θεωρημάτων καταλήγω στο γεγονός ότι $f: \mathbb{R}\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(t,y) = 2A\sqrt{y} + 2By$$

$\Rightarrow$ Δεν ισχύει η μονοτονία.

Όμως,

$$\sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon + \sigma(t) \quad , \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon'(t) = \sigma'(t) \leq 2A\sqrt{\sigma(t)} + 2B\sigma(t)$$

$$\leq 2A\sqrt{\sigma_\varepsilon(t)} + 2B\sigma_\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon : [t_0, T) \to [\varepsilon, +\infty)$$

Άρα $\sqrt{\sigma_\varepsilon(t)} \leq \sqrt{\sigma_\varepsilon(t_0)} \cdot e^{B(t-t_0)} + \frac{A}{B}\left(e^{B(t-t_0)} - 1\right) \quad (*)$

$(*)$ $y > 0$

$$y' = 2A\sqrt{y} + 2By$$

$\sqrt{y(t)} = f(t)$

$y = f^2(t)$

$$\Rightarrow 2ff' = 2Af + 2Bf^2$$

$$f' = A + Bf$$

$$e^{-Bt}(f' - Bf) = Ae^{-Bt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-Bt}f\right) = Ae^{-Bt} = \left(-\frac{A}{B}e^{-Bt}\right)'$$

$$\left(e^{-Bt}f + \frac{A}{B}e^{-Bt}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow e^{-Bt}f(t) + \frac{A}{B}e^{-Bt} = e^{-Bt_0}f(t_0) + \frac{A}{3}e^{-Bt_0}$$

Άρα, $f(t) = f(t_0) e^{B(t-t_0)} + \frac{A}{B}\left(e^{B(t-t_0)} - 1\right)$

$$\Rightarrow \sqrt{\sigma(t)} \leqslant \sqrt{\sigma(t_0)}\, e^{B(t-t_0)} + \frac{A}{B}\left(e^{B(t-t_0)} - 1\right)$$

$$\|\vec{y}(t)\| \leqslant \|\bar{y}(t_0)\| e^{B(t-t_0)} + \frac{A}{B}\left(e^{B(t-t_0)} - 1\right)$$

ή καλύτερα και πιο εύκολα σύμφωνα με την ανισότητα $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

Καταλήγοντας, έχουμε ότι,

$$e^{-(2B+A)t}\left(\sigma'(t) - (2B+A)\sigma\right) \leqslant A\, e^{-(2B+A)t}$$

$$\left(e^{-(2B+A)t}\sigma(t)\right)' \leqslant \left(-\frac{A}{2B+A} e^{-(2B+A)t}\right)'$$

Επομένως,

$$e^{-(2B+A)t}\sigma(t) + \frac{A}{2B+A} e^{-(2B+A)t}$$

και αφού $\downarrow$ $T > t > t_0$

Έχουμε ότι,

$$e^{-(B+A)t}\left(\sigma(t) + \frac{A}{2B+A}\right) \leqslant e^{-(2B+A)t_0}\left(\sigma(t_0) + \frac{A}{2B+A}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma(t) \leqslant e^{(2B+A)(t-t_0)}\sigma(t) + \frac{A}{2B+A}\left(e^{(2B+A)(t-t_0)} - 1\right)$$

$\blacksquare$

02/11/23

• Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία είναι ουσιαστικά παρόμοια με τη μέθοδο επίλυσης της $x' = \lambda x$.

$$x' = \lambda x$$
$$\Rightarrow x(t) = ke^{\lambda t}$$

Άρα, επί της ουσίας ψάχνουμε λύσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \vec{u}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \vec{u}$$

Οπότε,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \vec{u}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{u} = \lambda \vec{u}$$

όπου, $\lambda :=$ ιδιοτιμή του πίνακα και $\vec{u} :=$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

- $A\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$ όταν A αντιστρέψιμος

Δηλαδή,

$$\underbrace{A^{-1}A}_{:=I_n}\vec{x}=A^{-1}\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$$

Οπότε,

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\vec{u}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή.

$$\det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=1, \lambda=2$$

Για ιδιοτιμη 1, ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha+2\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha+2\beta=\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για ιδιοτιμή 2, ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 2\alpha \\ -\alpha + 2\beta = 2\beta \end{array}\right]$$

$$\iff \alpha = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, οι λύσεις είναι οι:

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$ • $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

Οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεώρημα:

Σε διαφορετικές ιδιοτιμές λ, μ έστω

$$V_\lambda = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \quad , \quad V_\mu = \langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle$$

Τότε τα $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_\ell$ είναι γρ. ανεξάρτητα. ■

Οπότε, οι δύο λύσεις που βρήκαμε μας παράγουν τον διανυσματικό χώρο:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή 1 έχουμε το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \iff \alpha = \alpha \ , \ \beta = \beta$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, έχω δύο γρ. ανεξάρτητες λύσεις:

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}$, • $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$

- Εάν στο,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Το $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ διακεκριμένες ιδιοτιμές

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ V_{\lambda_1} & V_{\lambda_2} & \cdots & V_{\lambda_m} \rightarrow \text{ιδιόχωρος} \end{array}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

$$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

όπου $k_i \in \mathbb{N}$.

Στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αν αθροίσω τις πολ/τητες των ιδιοτιμών τότε:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$$

$\dim V_{\lambda_\ell} \leq k_\ell \quad , \ell = 1, \ldots, m$ γεωμετρική πολ/τητα

- Συνολικά, πόσα γρ. ανεξάρτητα διανύσματα θα μπορούσαμε να βρούμε;

→ Τόσα όσα: $\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_m} \leq n$

VIP! • Πότε, $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_m} = n$;

→ Ισχύει, ανν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Θεώρημα:

Αν A είναι διαγωνιοποιήσιμος, ανν

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$$

■

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$$

$$P(A) = (A - \lambda_1 I_n) \cdot (A - \lambda_m I_n) = 0$$

$\hookrightarrow$ το ελάχιστο πολύνυμο.

Άσκηση:

Βρείτε τη γενική λύση της,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$