07/11/23

- Αν, $\vec{x}' = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\vec{x} = e^{\lambda t}\vec{c} \iff A\vec{c} = \lambda\vec{c}$$

όπου λ ιδιοτιμή του A.
Τότε, έχω n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Έστω,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Όπου, ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda = 1$
Απο χαρακτηριστικό πολυώνυμο,

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

Αν ιδιοδιανύσματα : $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Τότε,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \alpha \\ \beta = \beta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}$$

Αν $x''(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = c_1 \Rightarrow x(t) = c_2 + c_1 t$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο : $\lambda^2 = 0$

$$\Rightarrow e^{0t} = 1$$

Γενικά αν έχουμε:

$$\alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 x' + \alpha_0 x = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda) = (\lambda - \rho_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \rho_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \rho_k)^{m_k}$$

με λύση της μορφής:

$$e^{\rho_1 t}, \; t e^{\rho_1}, \dots, t^{m_1 - 1} e^{\rho_1 t}$$

Μέθοδος Γενικευμένων Ιδιοδιανυσμάτων:

Ψάχνουμε λύση στη μορφή: $(\vec{c}_1 + t\vec{c}_2)e^t = \vec{x}$

$$\vec{x}'(t) = \vec{c}_2 e^t + (\vec{c}_1 + t\vec{c}_2)e^t$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

$$\iff \vec{c}_2 e^t + (\vec{c}_1 + t\vec{c}_2)e^t = A\left((\vec{c}_1 + t\vec{c}_2)e^t\right)$$

$$= e^t(A\vec{c}_1 + tA\vec{c}_2)$$

$$\vec{c}^2 + \vec{c}_1 + t\vec{c}_2 = A\vec{c}_1 + tA\vec{c}_2$$

$$\iff \begin{bmatrix} \vec{c}_2 + \vec{c}_1 = A\vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 = A\vec{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} A\vec{c}_1 - \vec{c}_1 = \vec{c}_2 \\ A\vec{c}_2 = \vec{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} (A - I_2)\vec{c}_1 = \vec{c}_2 \\ A\vec{c}_2 = \vec{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$(A - I_2)\vec{c}_2 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\vec{c}_2$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

$$\Rightarrow (A - I_2)(A - I_2)\vec{c}_1 = (A - I_2)\vec{c}_2$$

$$(A - I_2)^2\vec{c}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{x}(t) = (\vec{c}_1 + \vec{c}_2 t)\, e^t$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha + t \\ \beta \end{bmatrix} e^t$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \alpha+t \\ \beta \end{bmatrix} e^t$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha+1+t \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+t+\beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\cdot \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha+t \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\alpha + 1 + t = \alpha + t + \beta$$
$$\Longleftrightarrow \beta = 1$$

Δεύτερη λύση: $\begin{bmatrix} \alpha+t \\ 1 \end{bmatrix} e^t$

<u>π.χ</u> $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} e^t$ μορφή δεύτερης λύσης

Οπότε, η γενική λύση είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
(Δουλεύει αυτή η μέθοδος όταν η γεωμετρική πολλ/τητα είναι μικρότερη της αλγεβρικής πολλ/τητας).

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff (\lambda-1)^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = 1+i \ , \ \lambda = 1-i$$

Αφού $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$

Τότε, τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (1+i) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \alpha + \beta = (1+i)\alpha \\ -\alpha + \beta = (1+i)\beta \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \beta = \alpha i \\ \alpha = -i\beta \end{bmatrix} \qquad \left(\beta = \alpha i \iff \alpha = \frac{\beta}{i} = \frac{\beta i}{i^2} = -\beta i \right)$$

$$\iff \beta = \alpha i$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha i \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t) \quad (*)$$

Αφού, $e^{it} = \cos t + i \sin t$, (Euler)

Τότε,

$$e^{(1+i)t} = e^t \cdot e^{it}$$
$$= e^t (\cos t + i \sin t)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(1-i)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$(*) = e^t \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t + i \sin t \end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \, i \\ -\sin t + \cos t \, i \end{bmatrix} e^{(1+i)t}$$

$$= e^t \cdot e^{it}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + i e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Μια δεύτερη λύση είναι η εξής:

$$e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} - i e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Χώρος:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^t, \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^t \right\rangle$$

Γενική Λύση:

$$c_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ας δούμε τώρα το,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij}(t) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t)}$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{C} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Θεώρημα:

Έστω, $A : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής και (<u>κάθε</u> συνιστώσα συνεχής!)

$\vec{g} : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ συνεχής συνάρτηση

Τότε το Π.Α.Τ,

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \quad , t > t_0$$
$$\vec{x}(t_0) = \vec{C}$$

έχει ακριβώς μια λύση και μάλιστα ορίζεται στο $[t_0, +\infty)$ ∎ διότι είναι γραμμική.

Επίσης είχαμε δει ότι,

$$x'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \quad , t > t_0$$
$$\vec{x}(t_0) = \vec{C}$$

Εάν $\|\vec{f}(t, \vec{x})\| \leq A(t) + B(t)\|\vec{x}\|$

Τότε, η λύση ορίζεται $\forall\, t \geq t_0$.

Οπότε,

$$\|\vec{f}(t,\vec{x})\| = \|A(t)\vec{x} + \vec{g}(t)\|$$

$$\leq \|A(t)\vec{x}\| + \|\vec{g}(t)\|$$

$$\leq \|A(t)\|_2 \cdot \|\vec{x}\| + \|\vec{g}(t)\|$$

$$\|Ax\| \leq \|A\|_2 \|\vec{x}\|$$

$$\|Ax\|^2 = \left(\sum_j a_{ij} x_j\right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right)^2$$

Αφού, $\left(\sum a_{ij} x_j\right)^2 \leq \left(\sum_j a_{ij}^2\right)\left(\sum_j x_j^2\right)$

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right)^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2 \|\vec{x}\|^2$$

Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα στο $\begin{cases} \vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) \\ x(t_0) = \vec{c} \end{cases}$ με

$$\vec{c} = \vec{c}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i\text{-οστή θέση}$$

Προκύπτουν οι λύσεις: $\vec{x}_i$, για $i = 1, 2, \ldots, n$ στο $[t_0, +\infty)$.

Οι λύσεις, $\vec{x}_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Το,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t) = 0 \xRightarrow{t=t_0} \sum c_i \vec{e}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots$$

όπου $c_i \in \mathbb{R}$.

Παράγουν τον χώρο των λύσεων.
Έστω $\vec{x}$ τυχαία λύση του.

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}(t) \quad , t > t_0$$

Υπάρχουν $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$\vec{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \vec{c}$$

Μια λύση είναι η εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t)$$

όπου λύνει την δ.ε.
Αρχικές συνθήκες είναι οι:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \vec{x}(t_0)$$

Απο το μονοσήμαντο των λύσεων έχω ότι:

$$\sum_{i} c_i \vec{x}_i(t) = \vec{x}(t)$$

VIP! Οι συγκεκριμένες λύσεις αποτελούν μια βάση του χώρου λύσεων και η διάσταση του χώρου είναι όσο το πλήθος των στοιχείων της βάσης. Δηλαδή ακριβώς n.

Θεώρημα:
Ο Χώρος των λύσεων
$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$$
με $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ συνεχής συνάρτηση, έχει διάσταση n. ■

Οι λύσεις $\vec{x}_i$ της Δ.Ε $\vec{x}_i(t_0)=e_i$

Ο πίνακας, $x(t)=[\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \dots \ \vec{x}_n]$

$\vec{x}(t_0)=I_n$

$A(t)X(t)$

$\Rightarrow X'(t)=[\vec{x}_1'(t) \ \vec{x}_2'(t) \cdots \vec{x}_n'(t)]$

Οπότε αφού, $\vec{x}_i'(t)=A\vec{x}_i$

Τότε,

$$x'(t)=[A(t)\vec{x}_1(t) \ \ A(t)\vec{x}_2(t) \ \cdots \ A(t)\vec{x}_n(t)]$$

$$=A(t)X(t). \quad (*)$$

{ Παρένθεση:

· Έστω $A=(a_{ij})_{n\times m}$ και $B=(b_{jl})_{m\times k}$ με το γινόμενο τους να ορίζεται ως $AB:=(\gamma_{il})_{n\times k}$. Δηλαδή,

$$\gamma_{il}=\sum_j a_{ij}b_{jl}$$

· Έστω $A(t)=(a_{ij}(t))$ και $X(t)=[\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n]$
$=(x_{ij}(t))$.

Διότι, $\vec{x}_1:=\begin{bmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{n,1}\end{bmatrix}$, ..., $\vec{x}_n:=\begin{bmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{n,n}\end{bmatrix}$

$x_{ij}=x_{j,i}(t)$
$x_{jl}=x_{lj}$

(*) $= \underbrace{\underbrace{A(t)}_{a_{ij}} \cdot \underbrace{X(t)}_{x_{ij}}}_{y_{il}}$

παρένθεση $\overset{\text{απο}}{\Longrightarrow}$ $y_{il} = \sum_j a_{ij} x_{jl}$

$= \sum_j a_{ij} x_{lj}$

$= x_{il}$.

Ουσιαστικά το σημαντικό είναι οτι:

$x'(t) = A(t)X(t)$. !