14/11/23

Π.Α.Τ : $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ $(**)$

$\vec{x}(t_0) = \vec{c}$

και δοθέντα στοιχεία: $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\vec{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ συνεχής.

$\vec{x}'(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t)$ $(*)$ (λύσεις διανύσματα)!

Διάσταση του χώρου των λύσεων την βρίσκουμε ως:

$$\vec{x}_i'(t) = A(t)\vec{x}_i(t)$$
$$\vec{x}_i(t_0) = c_i$$

όπου,

$\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ είναι μια βάση του χώρου των λύσεων της $(*)$.

• Τι ιδιότητες έχει ο πίνακας $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ όπου $X=[\vec{y}_1\ \vec{y}_2 \cdots \vec{y}_n]$;

$$\longrightarrow \quad X' = [\vec{y}_1{}'\ \vec{y}_2{}' \cdots \vec{y}_n{}']$$

$$= [A\vec{y}_1\ A\vec{y}_2 \cdots A\vec{y}_n]$$

$$= A[\vec{y}_1\ \vec{y}_2 \cdots \vec{y}_n]$$

$$= AX$$

$$\Longrightarrow X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$X' = AX \qquad (*') \qquad \text{(λύσεις πίνακες)!}$$

Λήμμα:

Έστω $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, πίνακας λύσεων της $(*)$ (ισχύει η $(*')$). Τότε

$$\det(X(t)) = \det(X(t_0))\cdot e^{\int_{t_0}^{t} (trA(s))\,ds}$$

■

• $tr(A) \to$ ίχνος (A)

Δηλαδή είναι για $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ το:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Πρόχειρο:

- Έστω $[a_{ij}(t)]$, τότε

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a_{ij}(t) \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{ij}(t) \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\det(a_{ij}(t)) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) \cdots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \cdots a_{2n}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t) \cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\det(A(t)) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)}(t) + a_{2\sigma(2)}(t) + \cdots + a_{n\sigma(n)}(t).$$

όπου, $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, μετάθεση.

$$(f_1(t) f_2(t) \cdots f_n(t))' = f'_1 \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 \cdot f'_2 \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 \cdots f_{n-1} f'_n$$

$$(1) = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \cdots a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a'_{n1} & a'_{n2} \cdots a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Έστω $|X_1 \cdots X_n| = \det[X_1 \cdots X_n]$ και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Τότε έχω ότι,

$$|AX_1\, X_2 \cdots X_n| + |X_1\, AX_2 \cdots X_n| + \cdots + |X_1\, X_2 \cdots X_{n-1}\, AX_n| =$$

$$= (\operatorname{tr} A) \cdot |X_1 \cdots X_n|.$$

Απόδειξη: (Λήμματος)

Έχουμε $t \longmapsto \det(X(t))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα,

$$X(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]$$

$$\frac{d}{dt}\det(X(t)) = \det[x_1'(t) \cdots x_n(t)]$$

$$+ \det[x_1(t)\, x_2'(t) \cdots x_n(t)]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \det[x_1(t) \cdots x_{n-1}(t)\, x_n'(t)]$$

$$= \det[Ax_1 \cdots x_n]$$

$$+ \det[x_1\, Ax_2 \cdots x_n]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \det[x_1\, x_2 \cdots Ax_n]$$

$$= tr(A(t))\det[x_1(t) \cdots x_n(t)]$$

$$= tr(A(t))\det(X(t))$$

Αν, $z(t) = \det(X(t))$

Τότε,

$$z'(t) = tr(A(t))\, z(t) \iff$$

$$\iff e^{-\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}\left(Z'(t)-tr(A(t))Z(t)\right)=0$$

$$\iff \left(e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds} Z(t)\right)'=0$$

Άρα,

$$\boxed{Z(t)=Z(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}}$$

■

- Ένας πίνακας $n \times n$ λύσεων της μορφής $(*)$, τότε είτε $\det X(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, είτε $\det X(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Αν $\det X(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, τον X τον αποκαλούμε Θεμελιώδη Πίνακα.

- Αντίστοιχα Πίνακας Μεταφοράς, όταν είναι θεμελιώδης πίνακας ως προς t. Επίσης πρέπει $\Phi(t_0,t_0)=I_n$.

$$\Phi_t(t,t_0)=A(t)\,\Phi(t,t_0)$$

Μήπως μπορούμε να συσχετίσουμε τον θεμελιώδη Πίνακα με τον Πίνακα Μεταφοράς;

Έστω $y(t)=X(t)X^{-1}(t_0)$

Τότε,

$$y'(t)=X'(t)X^{-1}(t)$$

$$= (A(t)X(t))X^{-1}(t_0)$$

$$= A(t)(X(t)X^{-1}(t_0))$$

$$= A(t)y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) \equiv \Phi(t,t_0)$$

$$\boxed{\Phi(t,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)}$$

$$y(t_0) = I_n$$

- Τι κάναμε στη βαθμωτή περίπτωση για τη λύση της Δ.Ε:

$$x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t) \quad , \text{όπου } \alpha, \beta, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} \cdot (x'(t) - \alpha(t)x(t)) = \beta(t) e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}$$

$$\left(e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} x(s)\right)' = \beta(t) e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \beta(\xi) e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} d\xi$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} + e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} \cdot \int_{t_0}^{t} \beta(\xi) e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} d\xi.$$

Οπότε, αν πάμε πίσω στην (**)

$$\Rightarrow \vec{x}'(t) - A(t)\vec{x}(t) = \vec{b}(t) \quad , \vec{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Έστω $Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

Τότε,

$$Y(t)\vec{x}'(t) - Y(t)A(t)\vec{x}(t) = Y(t)\vec{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t)\vec{x}(t)\right) = Y(t)\vec{b}(t)$$

$$\Rightarrow Y(t)\vec{x}(t) + Y'(t)\vec{x}(t)$$

Επομένως θα επιλέξουμε: $\boxed{Y'(t) = -Y(t)A(t)}$

Ερώτημα:

Ξέρουμε κάποια συνάρτηση που να λύνει αυτή την δ.ε;

Ουσιαστικά, "μιλώντας λακωνικά" σχετίζονται οι λύσεις των:

$$x' = \alpha(t)x(t) \longmapsto \text{λύση: } e^{+\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}$$

$$y' = -y(t)\alpha(t) \longmapsto \text{λύση: } e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}$$

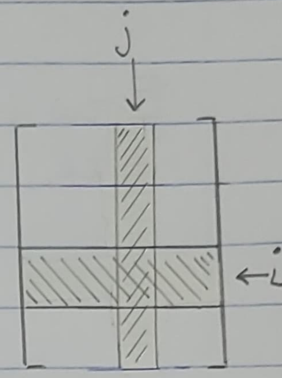
$\Rightarrow$ Οι λύσεις είναι αντίστροφες.

Το πρόβλημα λύνει το $X^{-1}(t) = Q(t)$

$X(t)Q(t) = I_n$;

Αν X θεμελιώδης πίνακας;
Αν X^{-1} παραγωγίσιμη συνάρτηση;

$$X^{-1}(t)=\frac{1}{\det(X(t))}\left(\operatorname{adj} X(t)\right)$$

$X(t)=$ 

την αφαιρώ!

Η Q είναι παραγωγίσιμη και με παραγώγιση παίρνουμε:

$$X'(t)Q(t)+X(t)Q'(t)=0$$

$X'=A(t)Y(t)$

$$(A(t)X(t))Q(t)+X(t)Q'(t)=0$$

$$X(t)Q'(t)=-A(t)\overbrace{(X(t)Q(t))}^{I_n}$$

$$=-A(t)$$

$$\Rightarrow Q'(t)=-X^{-1}(t)A(t)$$

$$Q'=-QA$$

Οπότε, με βάση τα προηγούμενα συνεχίζω από το γεγονός ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(X^{-1}(t)\vec{x}(t)\right) = X^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

$$X^{-1}(t)\vec{x}(t) - X^{-1}(t_0)\vec{c} = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

$$X^{-1}(t)\vec{x}(t) = X^{-1}(t_0)\vec{c} + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = X(t)\left(X^{-1}(t_0)\vec{c}\right) + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

$$= \left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)\vec{c} + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

$$= \Phi(t,t_0)\vec{c} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\vec{b}(s)ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}(t) = \Phi(t,t_0)\vec{c} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\vec{b}(s)ds}$$

- Έστω $y_1, \dots, y_n$, n συναρτήσεις.
  Γραμμική ανεξαρτησία;

  Αν $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,
  $$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) + \dots + \lambda_n y_n(t) = 0 \quad , t \in \mathbb{R}$$
  $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$

$$\lambda_1 y_1(t) + \cdots + \lambda_n y_n(t) = 0$$
$$\lambda_1 y_1'(t) + \cdots + \lambda_n y_n'(t) = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(t) = 0$$

Σε μορφή πίνακα το πιο πάνω γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα Wronski:

Για $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ισχύει ότι:

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα: (Liouville)

Έστω $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε:

$$y^{n}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + a_2(t) y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t) y'(t) + a_n(t) y(t) = 0$$

όπου $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις.
Τότε $W[y_1(t)\ y_2(t) \cdots y_n(t)]$

$$= W[y_1(t_0) \cdots y_n(t_0)]\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds}$$

Απόδειξη:

Ποιά είναι η Δ.Ε της ω;

$$\frac{d}{dt} \omega[y_1 \cdots y_n] = \frac{d}{dt} \det \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

κανόνας παραγώγισης

$$\frac{d}{dt} \det \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{ίδιες} \Rightarrow \det = 0$$

$$+\det \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{ίδιες} \Rightarrow \det = 0$$

$$+ \cdots$$

$$+\det \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{ίδιες} \Rightarrow \det = 0$$

$$+\det \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Αφού,

$$(*) \quad y_i^{(n)} = -a_1(t) y_i^{(n-1)}(t) - a_2(t) y_i^{(n-2)}(t) - \cdots - a_n(t) y_i(t)$$

όπου $i = 1, 2, \ldots, n$.

Οπότε, προσθέτω στην τελευταία γραμμή:

$\longrightarrow$ $a_n \cdot (1^{\eta}$ γραμμή$)$
$+\, a_{n-1} \cdot (2^{\eta}$ γραμμή$)$
$+ \cdots$
$+\, a_2 \cdot ((n-2)^{\eta}$ γραμμή$)$.

Επομένως, κάνοντας χρήση της $(*)$ στην τελευταία ορίζουσα που έμεινε έχω ότι:

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ [-a_1 y_1^{(n-1)} - \cdots - a_n y_1] & \cdots & [-a_1 y_n^{(n-1)} - \cdots - a_n y_n] \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ιδιότητες ορίζουσών}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & \cdots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= -a_1(t) \cdot W[y_1, \ldots, y_n].$$

Άρα καταλήγω στο ότι:

$$W[y_1, \ldots, y_n](t) = W[y_1, \ldots, y_n](t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds} \quad \blacksquare$$

16/11/23

Στόχος:

Να λυθεί το

$$X' = A(t)X$$
$$X(t_0) = B$$

όπου $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής συνάρτηση και $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Υπάρχει λύση που ορίζεται.

Μπορούμε να βρούμε τη λύση;

$$Y(t)\left(X'(t) - A(t)X(t)\right) = 0$$

$$\iff \quad \left(Y(t)X(t)\right)' = 0$$

$$\iff \quad Y(t)X(t) = Y(t_0)X(t_0)$$

$$Y(t) = Y(t_0)X(t_0)X^{-1}(t)$$

Απλοποίηση:

Η $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι βαθμωτή.

$$x'(t) = \alpha(t)x(t)$$
$$x(t_0) = c$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}\left(x'(t) - \alpha(t)x(t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{-\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}\, x(t)\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}}$$

- Ποιά είναι η ένδειξη ότι ισχύει το εξής;

$$x(t) = B e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds}$$

Έστω $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τ.ω

$$e^{Q} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}$$

Δηλαδή, $$e^{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Επίσης για νόρμα παίρνω το εξής εσωτερικό γινόμενο:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$\|Q^k\| \leq \|Q\|^k \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Οπότε, σύμφωνα με τα πιο πάνω μπορώ να πω ότι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(Q^k)_{ij}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|Q\|^k}{k!} = e^{\|Q\|}$$

όπου $$e^{Q(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k(t)}{k!}.$$

Αν η Q είναι παραγωγίσιμη, τότε και η $e^{Q(t)}$ είναι παραγωγίσιμη.
Οπότε,

$$\frac{d}{dt}\left(Q^2(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(Q(t)\cdot Q(t)\right)$$

$$= Q'(t)Q(t) + Q(t)Q'(t)$$

Θεώρημα:

Έστω $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, συνεχής συνάρτηση τ.ω

$$A(t)\cdot A(s) = A(s)\cdot A(t)$$

τότε, η λύση του προβλήματος,

$$X'(t) = A(t)X(t)$$
$$X(t_0) = B$$

δίνεται απο το τύπο:

$$X(t) = B e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε αρχικά πως

Είναι και άσκηση στο φυλλάδιο

$$A(t)\cdot\int_{t_0}^{s} A(\sigma)d\sigma = \int_{t_0}^{s} A(\sigma)d\sigma\cdot A(t)$$

Με επαγωγή:

$$A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{s} A(\sigma)d\sigma\right)^k = \left(\int_{t_0}^{\sigma} A(\sigma)d\sigma\right)^k A(t)$$

και τότε

$$\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma\right)^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{t} A(\sigma)ds\right)^{k-1}}{k!}$$

$$= A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^{t} A(\sigma)ds\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

(όπου $m=k-1$) $$= A(t)\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma\right)^m}{m!}$$

Οπότε έχω ότι,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma}\right) = A(t) e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma}$$

Επομένως καταλήγω στο γεγονός ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma}\cdot B\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma}\right) B$$

$$= \left(A(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)\, d\sigma}\right) \cdot B$$

$$= A(t) \left(e^{\int_{t_0}^{t} A(\sigma)\, d\sigma} B\right).$$

$\blacksquare$