21/11/23

Ουσιαστικά την προηγούμενη φορά είχαμε την Δ.Ε

$$x'(t)=A(t)X(t)$$

όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
Θέλαμε να βρούμε <u>συνθήκες</u> ώστε η λύση να ισχύει:

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$$

(*) <u>συνθήκη</u>: $A(t)A(s)=A(s)A(t)$, $t,s\in\mathbb{R}$

Ακόμη την προηγούμενη φορά είχαμε καταφέρει να λύσουμε την:

$$(**)\qquad x'(t)=A(t)X(t)+B(t)$$

$$\Updownarrow$$

όπου $X, A, B \in\mathbb{R}^{n}$.
Είχαμε,

$$Y(t)\left(X(t)-A(t)X(t)\right)=Y(t)B(t)$$

$$\Longleftrightarrow (Y(t)X(t))' = Y(t)B(t)$$

$$Y(t)X'(t) + Y'(t)X(t)$$

Οπότε, επιλέγουμε το $Y(t)$ τ.ω

$$Y'(t)X(t) = -Y(t)A(t)X(t)$$

Αν επιλέξουμε σωστά,

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{Y'(t) = -Y(t)A(t)} \\ \text{Α.Σ}: Y(t_0) = I_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Αν καλέσουμε:

$$\left.\begin{array}{l} X_1'(t) = A(t)X_1(t) \\ X_1(t_0) = I_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στα προβλήματα (1), (2);
Προφανώς ναι και ισχύει η πιο κάτω σχέση:

$$\boxed{Y(t) = X_1^{-1}(t)}$$

Όλα τα πιο πάνω τα έχουμε δει την προηγούμενη φορά.

Θεώρημα: (τύπος Liouville)
Έστω $x'(t) = A(t)X(t)$,
Τότε η $\det X(t)$ λύνει:

$$(\det(X'(t)))' = tr(A(t))\det(X(t))$$

$$\Longrightarrow \det(X(t)) = \det(X(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}$$

Οπότε αν στην,

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

πολλώ με $X_1^{-1}(t)$ θα πάρω:

$$X_1^{-1}(t)X'(t) = X_1^{-1}(t)A(t)X(t) + X_1^{-1}(t)B(t)$$

$$\left(X_1^{-1}(t)X(t)\right)' = X_1^{-1}(t)B(t)$$

$$X_1^{-1}(t)X(t) - X_1^{-1}(t_0)X(t_0) = \int_{t_0}^{t} X_1^{-1}(s)B(s)ds$$

$$\Rightarrow X_1^{-1}(t)X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1^{-1}(s)B(s)ds$$

$$X(t) = X_1(t)X(t_0) + X_1(t)\int_{t_0}^{t} X_1^{-1}(s)B(s)ds$$

$$= X_1(t)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1(t)X_1^{-1}(s)B(s)ds$$

Οπότε γράφοντας τον πιο πάνω τύπος σύμφωνα με τον πίνακα μεταφοράς: $\Phi(t,s) = X_1(t)X_1^{-1}(s)$

$$= \Phi(t,t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)ds.$$

Αντίστοιχα, θα είχαμε αν μιλούσαμε για την διανυσματική περίπτωση.

Δηλαδή,

Αν, $\begin{cases} \vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{c} \end{cases}$

Θα είχαμε,

$$\vec{x}(t) = \Phi(t,t_0)\vec{c} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\,\vec{b}(s)\,ds.$$

Ευστάθεια Λύσεων:

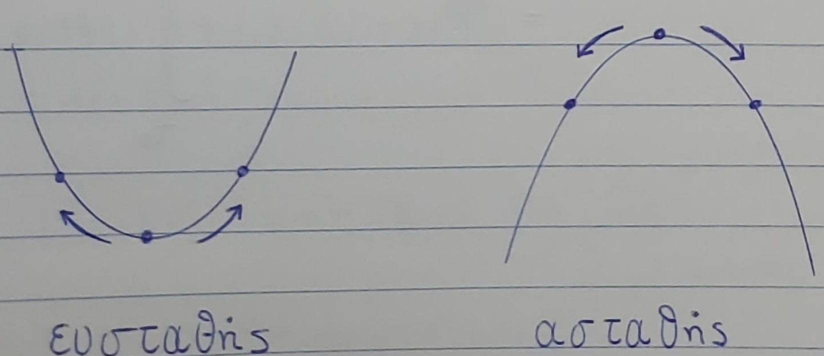
Τι γίνεται στις λύσεις

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$$
$$\vec{x}(t_0) = \vec{y}_0 \;;$$

ιδιόχωρος

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\dim V = n$.

Ερώτημα:
Πότε η μηδενική λύση είναι ευσταθής λύση της Δ.Ε;

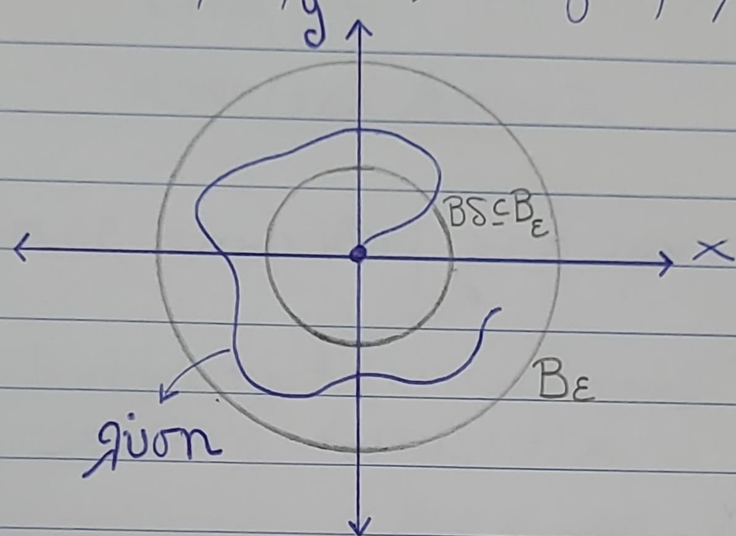


Ορισμός:

Η μηδενική λύση είναι ευσταθής αν

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \text{τ.ω} \quad \|\vec{y}_0\|<\delta \Rightarrow \|\vec{x}(t)\|<\varepsilon \quad , \forall t \geq t_0$$

- Ουσιαστικά ο ορισμός λέει γεωμετρικά ότι:



Ορισμός:

Η λύση $\vec{x}_0(t)$, είναι ευσταθής, αν

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \text{τ.ω} \quad \|\vec{y}_0-\vec{x}_0(t_0)\|<\delta \Rightarrow \|\vec{x}(t)-\vec{x}_0(t)\|<\varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Ορισμός:

Η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, όταν είναι ευσταθής και

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$$

Αντίστοιχα, η λύση $\vec{x}_0(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, αν είναι ευσταθής και

$$\lim_{t \to +\infty} (\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)) = \vec{0}$$

- Τι μπορούμε να πούμε για την ειδική περίπτωση

$$\vec{x}(t) = A \cdot \vec{x}(t)$$

ευστάθειας και της μηδενικής λύσης;

Έστω,

$$x'(t) = \alpha x(t) \quad , \; x(t_0) = c$$

όπου $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Τότε,

$$\text{λύση: } x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} \cdot c$$

$$= e^{\alpha t} \cdot k \quad , \; k := \text{σταθερά}$$

Ευστάθεια:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \;\; \text{τ.ω} \;\; |c| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon$$

και

$$e^{\alpha(t-t_0)} \cdot |c| < \varepsilon \quad , \; \forall \; t \geq t_0$$

Πότε έχω αυτή την ιδιότητα;
Τι υποθέσεις θα έχω στο α ώστε να ισχύει;

- Εάν $\alpha = 0$, $\delta = \varepsilon$ δουλεύει.

- Εάν $\alpha > 0$, Αδύνατο.

- Εάν $\alpha < 0$, $\delta = \varepsilon$ δουλεύει.

Αυτά όσον αφορά την ευστάθεια στη μηδενική.

- Για την <u>ασυμπτωτική ευστάθεια:</u>

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

ΜΟΝΟ αν $\alpha < 0$.

<u>Θεώρημα:</u>

Εάν κάθε ιδιοτιμή του A έχει πραγματικό μέρος αρνητικό
Τότε η μηδενική λύση τ.ω

$$\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

- <u>Jordan Block:</u>

$$J_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1.
Επίσης τα Jordan-Block μας βοηθάνε να υπολογίσουμε δυνάμεις.

<u>Παράδειγμα:</u>

- $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$

Γενική Δομή:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\cdot\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Απόδειξη: (Θεωρήματος)

Απο γραμμική, ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.
Δηλαδή, $\exists$ P αντιστρέψιμος, ώστε

$$A = P\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots \\ & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}P^{-1}$$

όπου b_{ii} είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.
Η λύση του αρχικού συστήματος είναι (με $\vec{x}(t_0)=\vec{c}$):

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot\vec{c}$$

$$= P\begin{pmatrix} e^{b_{11}(t-t_0)} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{b_{nn}(t-t_0)} \end{pmatrix}P^{-1}\vec{c}$$

$$\Longleftrightarrow P^{-1}\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{b_{11}(t-t_0)} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{b_{nn}(t-t_0)} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{c}.$$

Έστω,

$$\vec{y}(t) = P^{-1}\vec{x}(t) \quad \text{και} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Αν,

$$\vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \vec{y}$$

$$y_1'(t) = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n$$

$$y_2'(t) = 0 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n$$

$$\vdots$$

$$y_n'(t) = 0 + 0 + \cdots + 0 + b_{nn}y_n$$

Άρα,

$$y_n(t) = e^{b_{nn}(t-t_0)} \cdot y_n(t_0)$$

$$|y_n(t)| = e^{Re(b_{nn})(t-t_0) + \overbrace{Im(b_{nn})(t-t_0)i}^{\text{φεύγει}}} |y_n(t_0)|$$

$$\leqslant |y_n(t_0)| \quad , \quad t \geqslant t_0$$

$$\lim_{t\to\infty} y_n(t) = 0.$$

23/11/23

$$
\begin{aligned}
y_1' &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\
y_2' &= \qquad\quad\ \ + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\
&\ \ \vdots \\
y_n' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ b_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

όπου $Re(b_{kk})<0$ για $k=1,\dots,n$

Στόχος μας στο προηγούμενο μάθημα ήταν:

- Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
  Κάθε ιδιοτιμή του A, έχει πραγματικό μέρος αρνητικό
  Η μηδενική λύση της δ.ε

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Συνέχεια απόδειξης:

- Αν λύσουμε το πιο πάνω σύστημα παίρνουμε ως λύση:

$$y_n(t) = k e^{b_{nn}t}$$

όπου $b_{nn} = a_n + b_n i$, για $a_n<0$ και $b_n \in \mathbb{R}$

Επίσης ισχύει ότι,

$$
\begin{aligned}
|y_n(t)| &= |k|\,|e^{a_nt + b_nti}| \\
&= |k| e^{a_nt}.
\end{aligned}
$$

Γνωρίζουμε ότι,

$$y_{n-1}'(t) = b_{n-1,n-1}y_{n-1} + b_{n-1,n}y_n$$

Για αυτή αν πολλ/ζαμε με πολλ/στή Euler θα είχαμε:

$$\left(e^{-b_{n-1,n-1}t}y_{n-1}(t)\right)' = e^{-b_{n-1,n-1}t}b_{n-1,n}y_n(t)$$

$$e^{-b_{n-1,n-1}t}y_{n-1}(t) = C_2 + b_{n-1,n}\int_0^t e^{-b_{n-1,n-1}s}y_n(s)ds$$

$$\Rightarrow y_{n-1}(t) = C_2e^{b_{n-1,n-1}t} + b_{n-1,n}e^{b_{n-1,n-1}t}\int_0^t e^{-b_{n-1,n-1}s}\cdot y_n(s)ds$$

Οπότε ισχύει ότι:

$$|y_{n-1}(t)| \leq |C_2||e^{b_{n-1,n-1}t}| + |b_{n-1,n}||e^{b_{n-1,n-1}t}|\left|\int_0^t e^{-b_{n-1,n-1}s}y_n(s)ds\right|$$

όπου $b_{n-1,n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}i$ για $a_{n-1}<0$ και $b_{n-1}\in\mathbb{R}$

$$\leq |C_2|e^{a_{n-1}t} + C_3e^{a_{n-1}t}\cdot\int_0^t e^{-a_{n-1}s}|y_n(s)|ds$$

$$\leq |C_2|e^{a_{n-1}t} + C_3e^{a_{n-1}t}\int_0^t e^{-a_{n-1}s}(ke^{a_ns})ds$$

$$= |C_2|e^{a_{n-1}t} + C_3ke^{a_{n-1}t}\cdot\int_0^t e^{(a_n-a_{n-1})s}ds$$

Ακόμη,

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, κάθε ιδιοτιμή του A έχει πραγματικό μέρος αρνητικό.
Άρα η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

■

Διάγραμμα Φάσης:

vip! Προβάλλουμε την λύση στο xy-επίπεδο.
Απαλοίφουμε τον χρόνο απο τη λύση! ← vip!

Αυτόνομες Δ.Ε
$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \quad , t\in\mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Δ.Ε προβολής: $\boxed{\dfrac{d}{dx} = \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}}$ (η Δ.Ε εκεί που δεν μηδενίζεται.)

Ουσιαστικά, επιλύουμε την καμπύλη στο xy-επίπεδο.

Παραδείγματα:

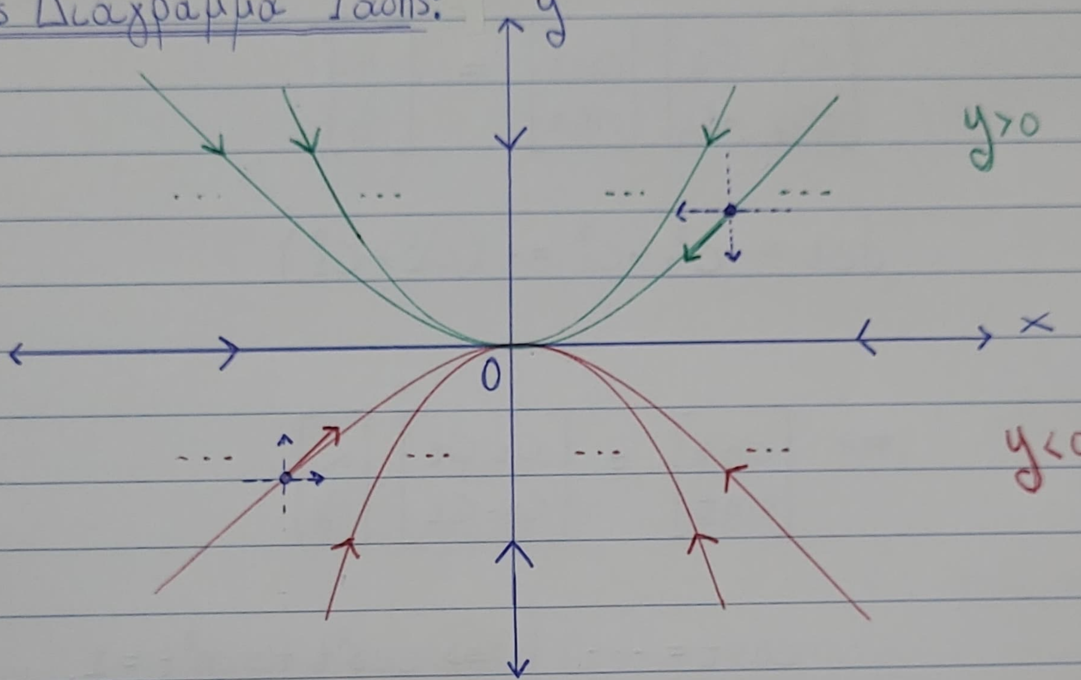
1) $\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -2y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-2t} \end{aligned}, \ t \geq 0$

Απολοιφή χρόνου: $\dfrac{x}{x_0} = e^{-t}$ και $\dfrac{y}{y_0} = e^{-2t}$

Οπότε προκύπτει:

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{x_0^2} x^2$$

Πλήρες Διάγραμμα Φάσης:



2) Για το σύστημα:

$$x' = y$$
$$y' = -x$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i}$$

και η γενική λύση είναι:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$
$$y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cdot \cos t$$
$$= c_2 \cos t - c_1 \sin t$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\det = -c_1^2 - c_2^2 = -(c_1^2 + c_2^2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos t = \cdots \\ \sin t = \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Οπότε,

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2$$