1η Παράδοση

[redacted] Σ.Δ.Ε.

08/10/2013

* Απ. III

Βιβλία: 1. Αλικάκος - Καλογερόπουλος "ΣΔΕ" ←
2. Σμυρλής "ΣΔΕ"
στο internet (University of Cyprus) το κατεβάζω
3. Birkhoff - Rota "Ordinary Differential Equations"
Εκδ. Wiley (και στο internet)

• Η πιο απλή διαφορική εξίσωση είναι ο νόμος του Νεύτωνα:

(διάνυσμα θέσης) υλικό σημείο $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{\gamma}(t)$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

$$\vec{\gamma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}$$

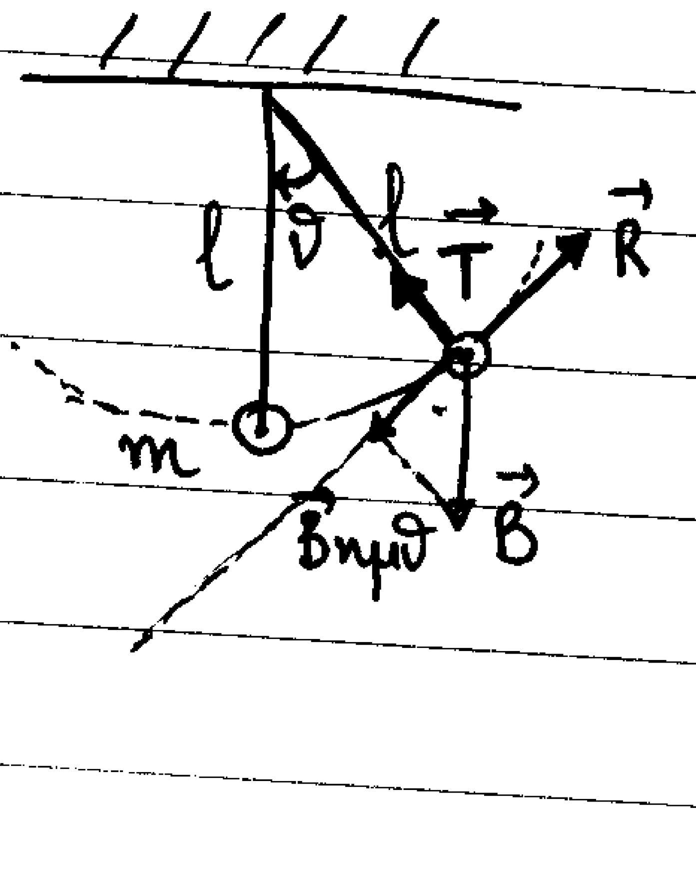
$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t)$$

$\boxed{m \cdot \vec{v}'(t) = \vec{F}(t)}$ Είναι δ.ε. 1ης τάξης.

$\boxed{m \cdot \vec{x}''(t) = \vec{F}(t)}$ Είναι 2ης τάξης Δ.Ε.

↳ Θέλουμε και $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$
$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \left(= \vec{x}'(0) = \tilde{x}_0\right)$

• Απλό εκκρεμές



$\vec{R}$: αντίσταση αέρα (εφαπτομενική στην κίνηση)

$\vec{B}\sin\vartheta - \vec{R} = m \cdot \vec{x}''(t)$

$$mg\sin\vartheta - R = m\cdot \ell\vartheta''(t)$$

Γιατί το $\vec{x}(t)$ το κάνω όσο το τόξο που διαγράφει, δηλ. $\ell\vartheta$

$$R = k\vartheta'(t)$$

Ο αέρας αντίσταται με κάποια παράμετρο της ταχύτητας.

Στο Λύκειο κάναμε την παραδοχή ότι $\sin\vartheta = \vartheta$

$$mg\sin\vartheta - k\vartheta'(t) = m\ell\vartheta''(t)$$

$\vartheta(0)=\vartheta_0, \quad \vartheta'(0)=\tilde{\vartheta}_0$

Και γίνεται...

- Ένα πρόβλημα Χημείας

$$2H_2 + O_2 \xrightarrow{k} 2H_2O$$

k: συντελεστής αντίδρασης

Παραγωγή νερού: Έχουμε στη διάθεσή μας a moles H_2 και β moles O_2. Θέλουμε να γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή t πόσα moles H_2O έχουν παραχθεί.

Έστω $N(t)$ τα moles νερού που έχουν παραχθεί μετά από πάροδο χρόνου t.

Έστω επίσης τη στιγμή t έχουμε $N_{H_2}(t)$ moles H_2 και $N_{O_2}(t)$ moles O_2. Από την αρχή διατήρησης της μάζας:

Τα moles H_2 που έχουν αντιδράσει είναι $N(t)$

οπότε $N_{H_2}(t) = a - N(t)$.

Αντίστοιχα, $N_{O_2}(t) = \beta - \dfrac{N(t)}{2}$

Ρυθμός μεταβολής νερού:

$$N'(t) = k\, N_{O_2}(t)\cdot N_{H_2}^2(t)$$

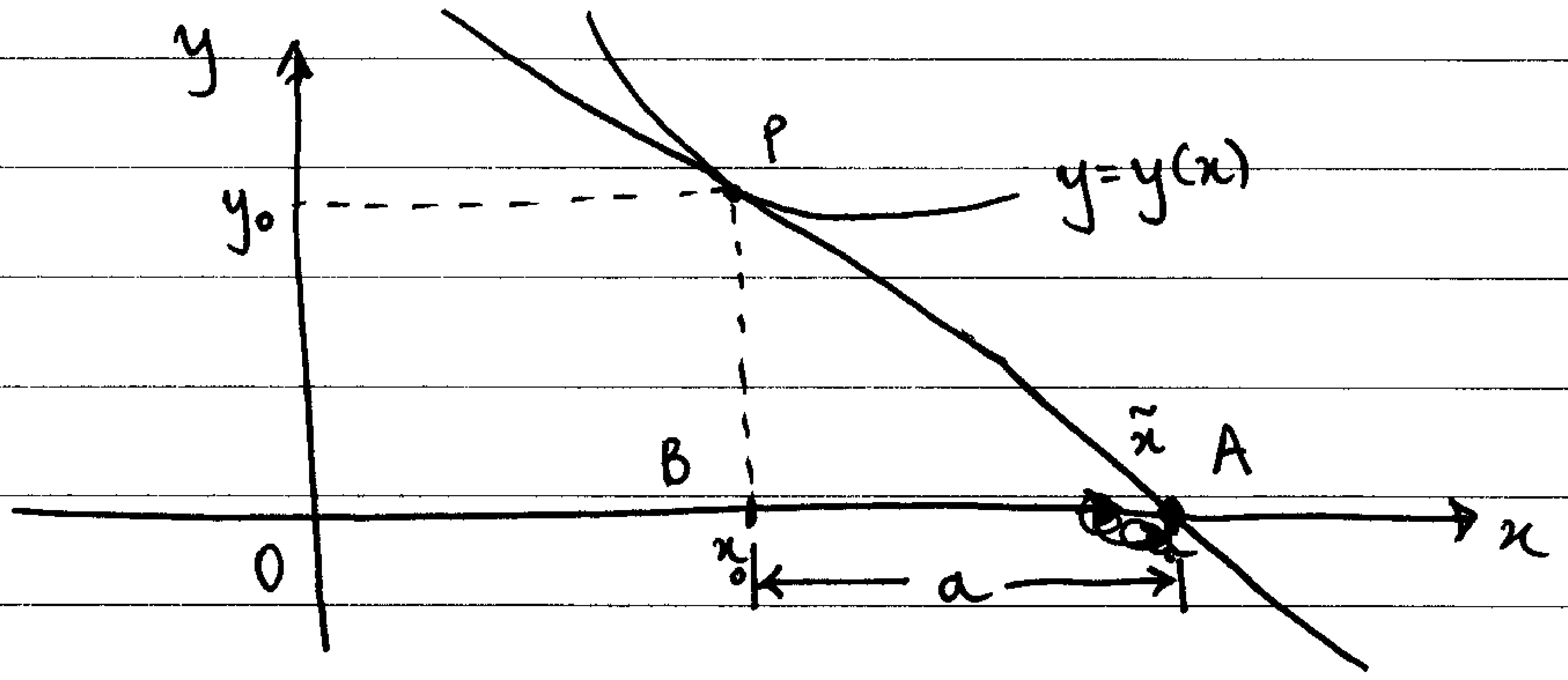
* Έχω $N_{H_2}^2(t)$ γιατί το H_2 έχει συντελεστή 2 στη χημική εξίσωση.

$$N'(t) = k\cdot\left(\beta - \tfrac{1}{2}N(t)\right)\cdot\left(a - N(t)\right)^2, \quad t>0.$$

$$N(0) = 0$$

- <u>Ένα πρόβλημα Γεωμετρίας</u>

Το πρόβλημα του de Beaune: Να βρεθεί η κα
επίπεδο xOy που η εφαπτομένη της σε (καθ
τέμνει τον άξονα των x, σε σημείο που να απέ
προβολή του P στον άξονα των x, σταθερή απόσ



Έστω $y(x)$ η συνάρτηση της καμπύλης (ά

Η εξίσωση της εφαπτομένης:

$y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$

(Πού τέμνει τον άξονα x?) $y=0$ $\Leftrightarrow -y_0 = y'($

$\Leftrightarrow \tilde{x}-x_0 =$

$\Leftrightarrow \tilde{x} = x_0 -$

Πρέπει $\tilde{x}-x_0 = a$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)} \Leftrightarrow \boxed{a\,y'(x)+y(x)=0}$

Σ.Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης : $F(t, y(t), y'(t)) = 0$

Π.χ. $t + y^2(t) - y'^3(t) = 0$

Σ.Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης: $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$

*

$F(t,y,z)=0 \Longrightarrow z=G(t,y)$

$f:[a,b]$

$f \in C^1$

Θ. πεπλεγμένης συνάρτησης:

$F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση

Αν $\exists (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ ώστε:

$F(x_0,y_0,z_0)=0$

και επιπρόσθετα $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

Τότε $\exists \rho>0 : \forall (x,y)\in B_\rho(x_0,y_0) : z=G(x,y)$ με

$z_0=G(x_0,y_0)$.

$x'(t)=F(t,x(t))$ ← Τότε είναι σε επιλύσιμη

$H(t,x(t),x'(t))=0$

Τι λέμε λύση στη Δ.Ε.?

Πρόβλημα Αρχικών Συνθηκών

$$\begin{bmatrix} x'(t)=F(t,x(t)), & t>t_0 \\ x(t_0)=x_0 & \end{bmatrix}$$

Πρέπει: $x\in D((t_0,+\infty))\cap C[t_0,+\infty)$

και $x'(t)=F(t,x(t))$ $\forall t>t_0$

και $x(t_0)=x_0$.

παραγωγίσιμη

και συνεχής στο

$x''(t)=F(t,x(t),x'(t))$

$x(t_0)=x_0$

$x'(t_0)=x_1$

Πρέπει $x\in D^2((t_0,+\infty))\cap C^1([t_0,+\infty))$

κ.λπ. ...

Αυτό θα το λέμε λύση.

$$y'(t)=0 \overset{t\geq t_0}{\Longrightarrow} y(t)\equiv y_0, \quad t\geq t_0.$$
$$y(t_0)=y_0$$

Γιατί είναι μοναδική η λύση;

Από Θ.Μ.Τ.: $y\in C[t_0,+\infty)\cap D(t_0,+\infty) \Longrightarrow$

$\Rightarrow \forall t>t_0,\ \exists\ \xi\in(t_0,t):\quad y(t)-y(t_0)=(t-t_0)\cancel{y'(\xi)}$

Προσπαθούμε να κάνουμε την εξίσωση μας τέλεια

$$y'(t)=y(t) \Leftrightarrow y'(t)-y(t)=0$$

Πολλαπλασιαστής Euler: $e^{-t}y'(t)-e^{-t}y(t)=0$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}y(t)\right)=0$$

$$e^{-t}y(t)=e^{-0}y(0)=y_0 \Rightarrow y(t)=y_0e^{t} \quad \forall t\geq 0.$$

2^{η} Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 10/10/2013

(Επανάληψη Απ. ΙΙΙ)

(∗) $\underbrace{y' + g(t)\,y}_{\text{γραμμική } 1^{\eta\varsigma} \text{ τάξης}} = \underbrace{h(t)}_{\text{μη ομογενής}}$ $\qquad g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Εν γένει, για μη ομογενείς γραμμικές, βρίσκω μια ειδική λύση $y_{ειδ}$ τ.ω. $y'_{ειδ} + g(t)\,y_{ειδ} = h(t)$, και τότε το να βρω όλες τις λύσεις είναι να βρω όλες τις λύσεις του ομογενούς z τ.ω. $z' + g(t)\,z = 0$.

Τότε, οι λύσεις του ομογενούς είναι ένας γραμμικός υπόχωρος, ~~...~~ γι' αυτό το ζητούμενο είναι να βρω μια βάση του ~~...~~ διανυσματικού χώρου

~~...~~

$\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_k\}$ με (1) $z_1, \dots, z_k$ γρ. ανεξ.

$\left(\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \lambda_1 z_1(t) + \dots + \lambda_k z_k(t) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0\right)$

(2) Αν z λύση της (∗), τότε $\exists\, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R} : z(t) = \mu_1 z_1(t) + \dots + \mu_k z_k(t)$

Αν έχω να λύσω την $z' = 0$, έχω $z(t) = c$, $t \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{B} = \{1\}$

Αν $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τι διάσταση έχω?

Παραδείγματα:

- $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\quad x'(t) - x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$

$\implies \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad x(t) = c e^{t}$, $t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{B} = \{e^{t}\}$ $\qquad$ Έχει διάσταση 1.

Άλλος τρόπος: Χαρακτηριστική εξίσωση
Ψάχνουμε για ειδικές λύσεις:

$x(t)=e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t}-e^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda-1=0}$ Χαρακτηριστική εξίσωση

$\lambda=1$

- $x''(t)-x(t)=0 \quad , t\in\mathbb{R}$

Ψάχνω για λύση στη μορφή $x(t)=e^{\lambda t}$, $t\in\mathbb{R}$

$x'(t)=\lambda e^{\lambda t}$

$x''(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$.

Χαρ. εξίσωση: $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \longrightarrow e^{t} \\ \lambda=-1 \longrightarrow e^{-t} \end{cases}$ γραμ. ανεξ.

Η $y(t)=\mu_1 e^{t}+\mu_2 e^{-t}$ είναι λύση.

- $x''(t)+x(t)=0 \quad , t\in\mathbb{R}$

Χαρ. εξίσωση: $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$

$e^{it}=\cos t+i\sin t$

$e^{-it}=\cos t-i\sin t$

Οι $\cos t$, $\sin t$ είναι λύσεις (γρ. συνδυασμός των e^{it}, e^{-it}) και είναι πραγματικές λύσεις.

- $x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1x'(t)+a_0x(t)=0$

Ομογενής n τάξης.

(Ψάχνουμε για λύση $e^{\lambda t}$)

$\Rightarrow \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ Χαρακτ. εξίσ.

$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}=0$

Όχι μόνο βρήκα λύσεις, αλλά έχουν και πολλαπλότητες.

Π.χ. $x''(t)=0 \Rightarrow (x'(t))'=0 \Rightarrow \exists c_1 : x'(t)=c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x(t)-c_1(t))'=0 \Rightarrow \exists c_2 : x(t)-c_1(t)=c_2 \Rightarrow x(t)=c_1 t+c_2$

$\mathcal{B}=\{1,t\}$

Αν προσπαθούσα να απαντήσω με τη χαρ. εξ., θα είχα $\lambda^2=0$, δηλ. το 0 διπλή ρίζα.
Τότε έχω την $e^{0t}=1$, αλλά και την $1\cdot t$.
Δηλαδή, πάντα θα παίρνω τις

$$\underbrace{e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}}_{m_1}$$

δ

- $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$ Σύστημα.
  $\vec{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times 1}$
  $\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= 2y \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (*)$$

$\vec{x}=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

Ψάχνω λύση στη μορφή:
$\vec{X}(t)=e^{\lambda A t}\vec{c}$

$a\in\mathbb{R}\to e^a=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}$

$B\in\mathbb{R}^{n\times n}\to e^{tB}:=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}B^k$

$\frac{d}{dt}e^{tB}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k t^{k-1}}{k!}B^k$
$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}B^k$
$=B\cdot e^{tB}$.

$\Rightarrow \vec{x}'(t)=e^{\lambda A t}(\lambda A)\vec{c}$

$e^{\lambda A t}(\lambda A)\vec{c}=A\cdot e^{\lambda A t}\vec{c}$
$=e^{\lambda A t}A\vec{c}$

$$\vec{x}(t)= e^{\lambda I_n t}\vec{c}$$
$$\vec{x}'(t)=\lambda e^{\lambda I_n t}\vec{c}$$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda I_n t}\vec{c} = A e^{\lambda I_n t}\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow e^{\lambda I_n t}\left[\lambda I_n - A\right]\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda I_n - A)\vec{c}=\vec{0}$$

αντιστρέψιμος! ο αντίστροφός του είναι ο $e^{-\lambda I_n t}$

$AB=0$
$\Downarrow$ αν ένας είναι αντιστρέψιμος
τότε ο άλλος είναι 0. ΓΙΑΤΙ:
$A^{-1}(AB)=A^{-1}\cdot 0 \Leftrightarrow (A^{-1}A)B=0$
$\Leftrightarrow B=0$

Βρίσκω τις ιδιοτιμές του A.

Ιδιοτιμές: $\det(\lambda I_n - A)=0$
Ιδιοδιανύσματα.

Χαρ. πολυώνυμο: $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}=0$

$\downarrow$

Βρίσκω τον υπόχωρο των ιδιοδιανυσμάτων με $\dim V(\lambda_1)\le m_1$ . . .

Το $\dim(V(\lambda_i))$ το λέω γεωμετρική διάσταση της ιδιοτιμής, το m_i αλγεβρική διάσταση της ιδιοτιμής.
Αν $\dim V(\lambda_i)=m_i$, ο A διαγωνοποιήσιμος

Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών.

$$x'(t) = f(x(t))\cdot g(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t)$$

Π.χ. $x'(t)=tx^2(t)$, $t>0$
$x(0)=a$, $a\in\mathbb{R}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$x \in D(0,+\infty) \cap C[0,+\infty)$

i) $a=0$, τότε η $x(t)=0$, $t\geq 0$ είναι μια λύση του προβλήματος.

ii) $a\neq 0$: Επειδή η x είναι συνεχής στο 0, οπότε $\exists\, \delta>0$ ώστε $x(t)\neq 0$ στο $[0,\delta]$.

Τότε για $t\in(0,\delta]$: $\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t$, $0<t\leq\delta$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{x(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x(t)}+\frac{t^2}{2}\right)=0 \quad , 0<t\leq\delta$$

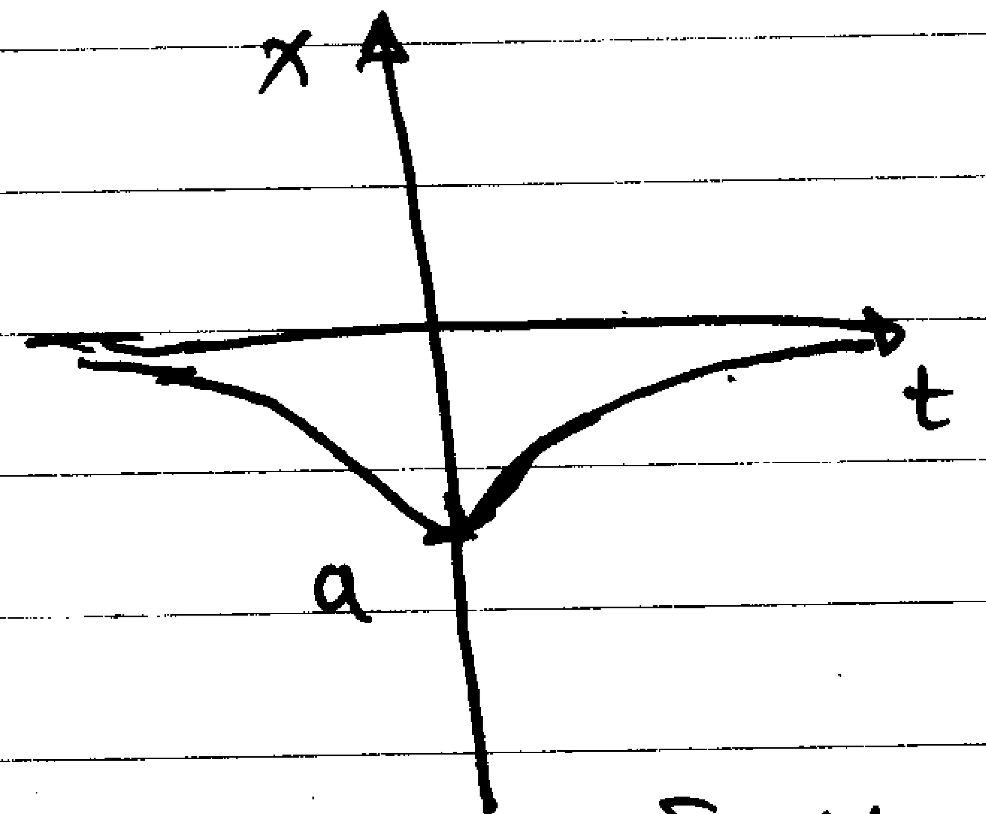
$$\frac{1}{x(t)}+\frac{t^2}{2} = \frac{1}{x(0)}+\frac{0^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{a}-\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{a}-\frac{t^2}{2}\right)x(t), \quad 0<t\leq\delta$$

Το $\frac{1}{a}-\frac{t^2}{2}=0$ όταν $t^2=\frac{2}{a}$

ii) (α) Αν $a<0$: $\frac{1}{a}-\frac{t^2}{2}\neq 0 \Rightarrow x(t)=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{t^2}{2}}$, $0<t\leq\delta$

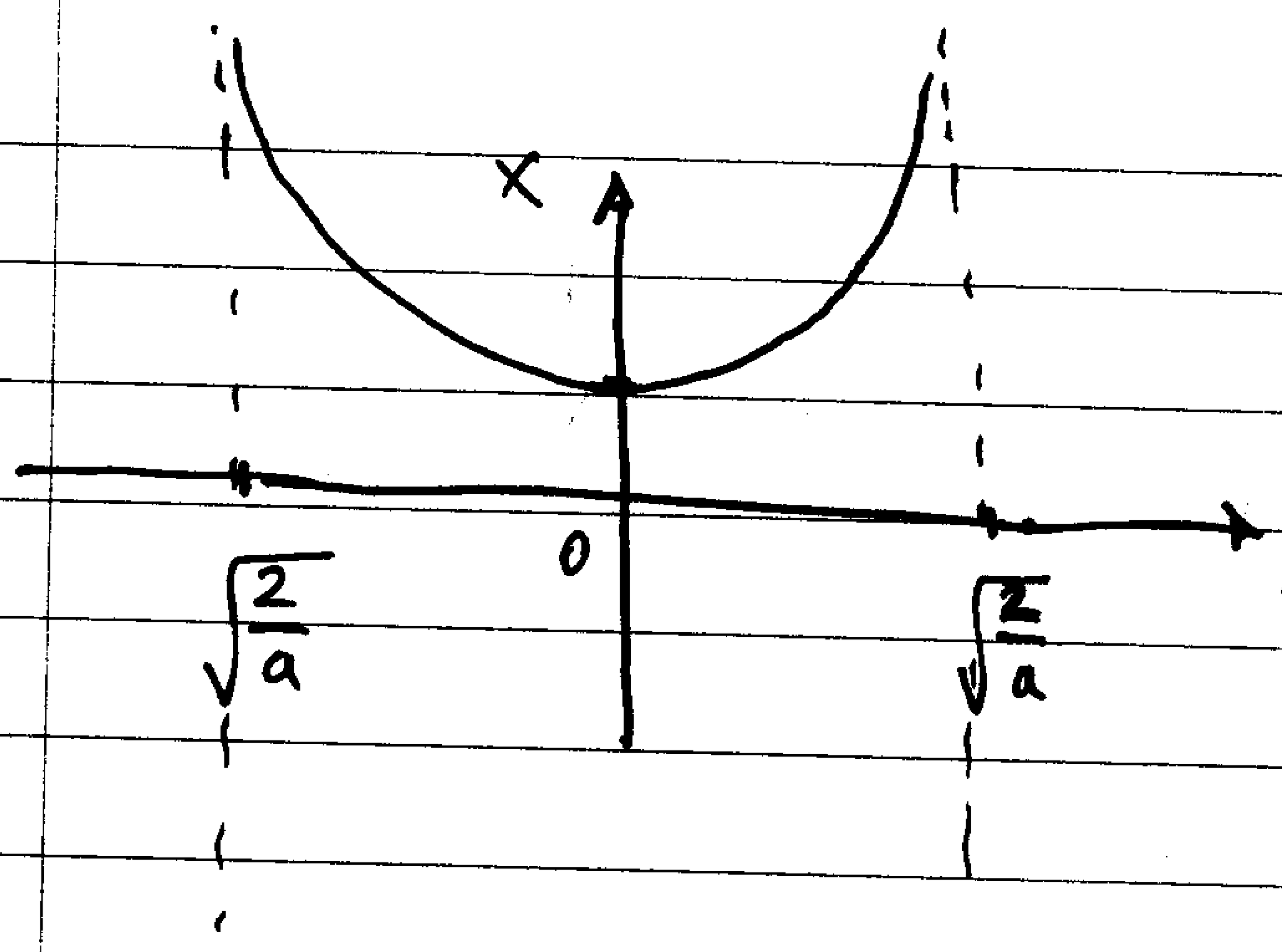
Παρατηρούμε ότι η λύση δε μηδενίζεται, $\forall t>0$
Επομένως το μεγαλύτερο διάστημα που αυτό που βρήκα δε μηδενίζεται είναι το $[0,+\infty)$, άρα ως λύση παίρνω: (+)

$$x(t)=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{t^2}{2}}, \quad t\geq 0.$$



ii) (β) $a>0$: Όταν $t=\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$, ο παρονομαστής μηδενίζεται.

Άρα θα πάρω το διάστημα $\left[0,\sqrt{\frac{2}{a}}\right]$.



$$x(t)=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{t^2}{2}}, \quad 0\le t<\sqrt{\frac{2}{a}}$$

Προβλήματα:

(1) Πόσες λύσεις έχει το πρόβλημα $tx'(t)-x(t)=t^2\cos t,\ t>0$
$x(0)=0$.

Πρέπει να βρω τον πολλαπλασιαστή Euler.

$tx'-x=0 \Rightarrow \frac{x'}{x}=\frac{1}{t} \Rightarrow \ln x=\ln t \Rightarrow x=t$. Είναι λύση της ομογενούς.

Άρα ο πολλαπλασιαστής Euler είναι $\frac{1}{t}$ στην εξίσωση όπου ο συντελεστής του x' είναι 1.

$$x'(t)-\frac{1}{t}x(t)=t\cos t, \quad t>0$$

$$\frac{1}{t}x'(t)-\frac{1}{t^2}x(t)=\cos t, \quad t>0$$

$$\left(\frac{x(t)}{t}\right)'=(\sin t)' \iff \left(\frac{x(t)}{t}-\sin t\right)'=0$$

$$\Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}: \frac{x(t)}{t}-\sin t=c, \quad t>0$$

$$\Rightarrow x(t)=ct+t\sin t, \quad t>0$$

$\lim_{t\to 0^+} x(t)=0$ άρα λύση είναι η της $x_c(t)=ct+t\sin t,\ t>0$ Πόσες έχω? Άπειρες!

ΕΠ171

② Αποδείξτε ότι το πρόβλημα $tx'(t)-2x(t)+t^2=0$, $t>0$

$x(0)=1$

δεν έχει λύση!

3η Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 15/10/2013

1. **Καλή τοποθέτηση προβλήματος** (Hadamard)

ΦΥΣΙΚΗ Πείραμα: (Ντετερμινιστική προσέγγιση)
→ 1) Αποδοχή γεγονότος
2) Κάτω από τις "ίδιες συνθήκες" παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα
3) Μικρές διαταραχές των παραμέτρων οδηγούν σε μικρές αποκλίσεις του πειράματος.

ΜΟΝΤΕΛΟ
1) Το πρόβλημα έχει λύση.
2) Το μονοσήμαντο της λύσης
3) Συνεχή εξάρτηση των λύσεων από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Παράδειγμα: (1) Το Π.Α.Τ. (πρόβλημα αρχικών τιμών)

$$ty'(t) - y(t) = t^2\cos t \quad , t>0$$
$$y'(0)=0$$

έχει λύσεις τις $y(t) = ct + t\sin t$, $t \geq 0$.
που είναι άπειρες. Άρα δεν έχουμε καλή τοποθέτηση του προβλ.

(2) Το πρόβλημα $ty'(t) - 2y(t) + t^2 = 0$, $t>0$
$y(0)=1$

δεν έχει λύση. (γιατί;)

$$ty'(t) - 2y(t) + t^2 = 0$$
$$y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = -t$$

Βρίσκω τον πολ/στή Euler. $\int -\frac{2}{t}dt = -2\int \frac{1}{t}dt = -2\ln t$

$e^{-2\ln t} = t^{-2}$.

Αλλιώς για να το βρω: Βρίσκω λύση ομογενούς και ο πολ/στής Euler είναι $\frac{1}{\text{λύση}}$.

$$t^{-2}y'(t) - \frac{2}{t^{-3}}\, y(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2}y(t)\right) = \frac{d}{dt}(-\ln t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2}y(t) + \ln t\right) = 0$$

$\exists c \in \mathbb{R}$: $t^{-2}y(t) + \ln t = c \Rightarrow y(t) = (c - \ln t)\,t^2$

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{t\to 0^+} t^2(c-\ln t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{c-\ln t}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2} = 0$$

Άρα $y(0) \neq 1$, αφού θέλω να είναι συνεχής στο 0.
Άρα δεν έχω αποδεκτή λύση (θα είχα μόνο αν $y(0)=0$).

ΑΣΚΗΣΗ

(3) Το Π.Α.Τ. $\sqrt{t}\,y'(t) - 2y(t) + \sqrt{t} = 0$, $t>0$
$y(0) = 1$ έχει λύση; (ποια;)

Αν γράψω τη (2) ως προς το $y'(t)$, έχω

$$y'(t) = \frac{2}{t}y(t) - t, \quad t>0$$
$$y(0) = 1$$

$f(t,y) = \frac{2}{t}y - t$ δεν είναι συνεχής στο 0
(γι' αυτό έχω πρόβλημα).

(4) Το Π.Α.Τ. $y'(t) = y^2(t)$, $t>0$
$y(0) = 0$

Η μηδενική συνάρτηση είναι προφανής λύση. Είναι μόνο αυτή;
$y(t) \equiv 0$, $t \geq 0$

(5) Το Π.Α.Τ. $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $t>0$
$y(0) = 0$
Έχει άπειρες λύσεις.

Μια λύση είναι η $y(t)\equiv 0$, $t\geq 0$.
Εάν υπάρχει και μη τετριμμένη λύση, τότε θα υπάρχει για κάποιο $t_0>0$, $y(t_0)\neq 0$.
Λόγω συνέχειας της λύσης στο t_0, θα υπάρχει διάστημα $(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_2)$ ώστε $y(t)\neq 0 \ \forall\, t\in(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_2)$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}} = 1, \quad t\in(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{|y(t)|}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(2\,|y(t)|^{1/2}\right) =$$

είναι παραγωγίσιμη εκτός από το $y(t)=0$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot|y(t)|^{1/2-1}\cdot\frac{d}{dt}|y(t)|$$

Έχει σταθερό πρόσημο γιατί δεν έχω $y(t)=0$ πουθενά.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $y(t)>0$, $t\in(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_2)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{|y(t)|}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}|y(t)|^{1/2-1}\cdot y'(t)$$

Άρα $\dfrac{d}{dt}\left(2|y(t)|^{1/2}-t\right)=0$

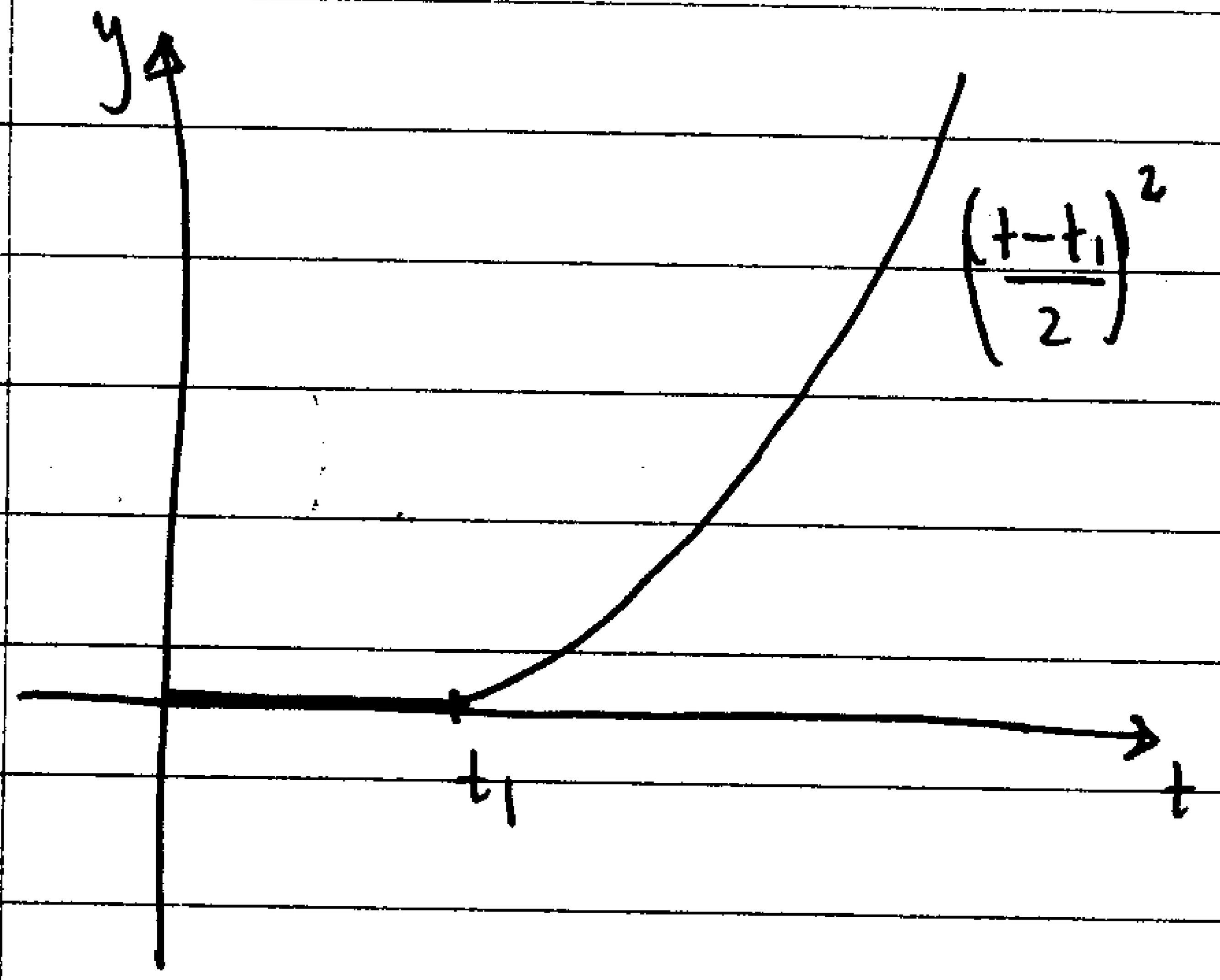
$$\Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}: 2|y(t)|^{1/2}-t=c, \quad t\in(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y(t)} = c+t \geq 0$$

Αυτό ισχύει όσο $c+t>0$.
Αν t_1 η μεγαλύτερη τιμή ώστε $y(t_1)=0$, τότε $y(t_1)=0 \Leftrightarrow t_1+c=0 \Leftrightarrow c=-t_1$, $t>t_1$.

$$\sqrt{y(t)} = \frac{t-t_1}{2} \Leftrightarrow y(t)=\left(\frac{t-t_1}{2}\right)^2, \quad t>t_1$$

β) $y(t)<0$, $t\in(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_2)$



Πριν το t_1,

$$y_{t_1}(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le t_1\\ \left(\frac{t-t_1}{2}\right)^2, & t>t_1.\end{cases}$$

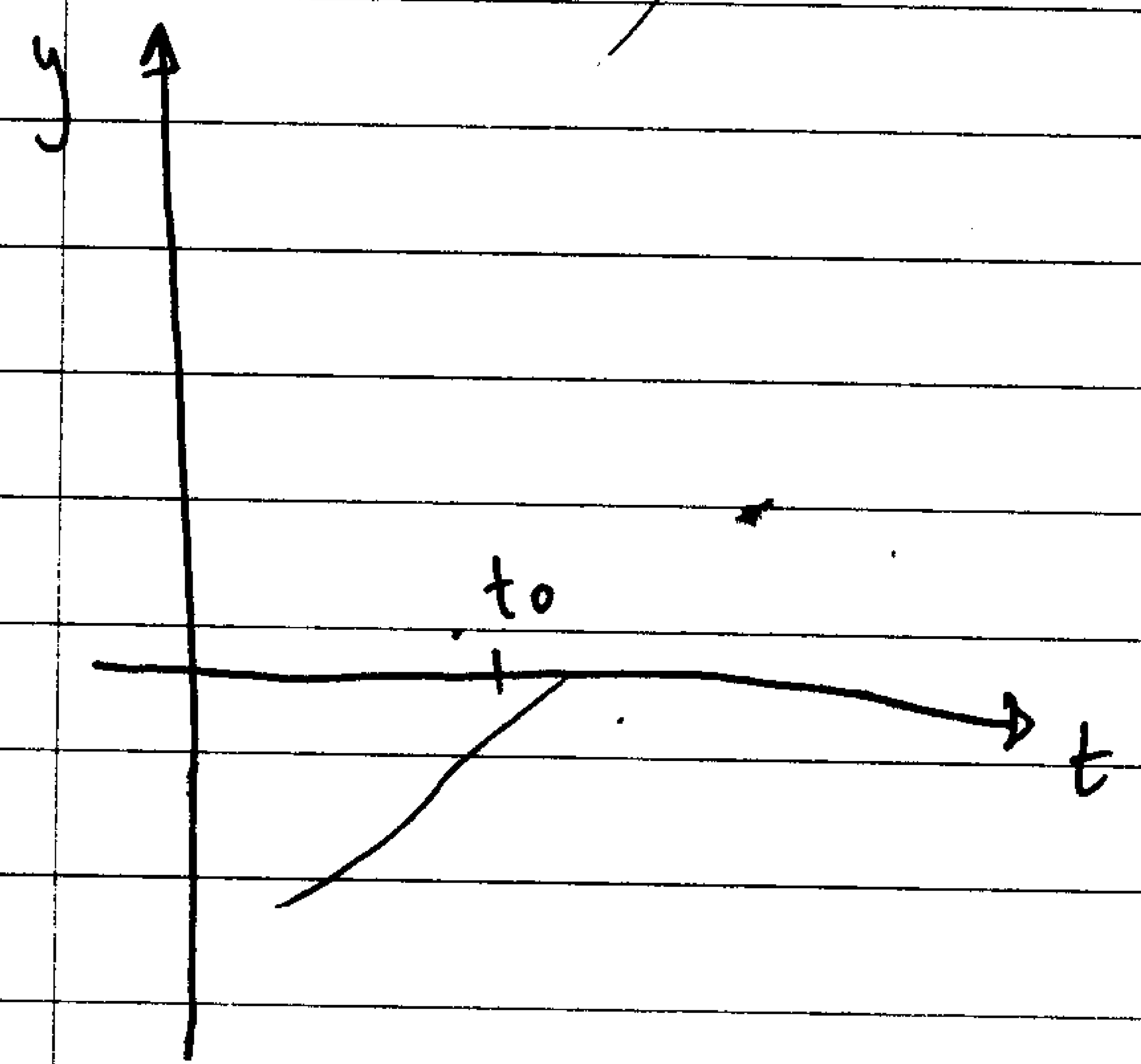
(b) $$\frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}}=1$$

$$\frac{d}{dt}\left(2\,|y(t)|^{1/2}\right)=-1$$

$$=|y(t)|^{-1/2}\left(-y'(t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(2\,|y(t)|^{1/2}+t\right)=0 \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}:\ 2|y(t)|^{1/2}+t=c$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\,|y(t)|^{1/2}=c-t.$$



Η $y(t)$ αύξουσα.

$y(0)\le y(t_0)<0$

ΑΝΤΙΦΑΣΗ.

Άρα κρατάω μόνο τις ισορροπίες λύσεις.

(6) Το πρόβλημα $\begin{aligned} y'(t)+y(t)&=1, \quad t>0 \\ y(0)&=c \end{aligned}$

είναι καλά τοποθετημένο, ενώ το πρόβλημα

$$\begin{aligned} y'(t)+y(t)&=1, \quad t\in\mathbb{R} \\ y(0)&=c \end{aligned}$$

δεν είναι καλά τοποθετημένο.

$y'(t)+y(t)=1$ Πολ/στής Euler: e^t.

$$e^t(y'(t)+y(t))=1\cdot e^t$$
$$\Rightarrow e^t y'(t)+e^t y(t)=e^t$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^t y(t)\right)=\frac{d}{dt}e^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^t y(t)-e^t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: e^t y(t)-e^t=k$$

I) $t\geq 0$ II) $t\in\mathbb{R}$.

Όμως $y(0)=c \Leftrightarrow e^0 c-e^0=k \Leftrightarrow k=c-1$

Επομένως $e^t y(t)-e^t=c-1 \Leftrightarrow y(t)=1+(c-1)e^{-t}$.
Δοθέντος του c έχω μοναδική λύση.

Και στις δυο περιπτώσεις, το πρόβλημα έχει λύση και είναι ακριβώς μία
Περίπτωση I:

$$y_c(t)=1+(c-1)e^{-t}, \quad t\geq 0$$

$$\left|y_{c_1}(t)-y_{c_2}(t)\right|=\left|1+(c_1-1)e^{-t}-\left(1+(c_2-1)e^{-t}\right)\right|=\left|(c_1-1)e^{-t}-(c_2-1)e^{-t}\right|$$

$$=\left|(c_1-c_2)e^{-t}\right|\leq|c_1-c_2|, \quad t\geq 0$$

γιατί η χειρότερη επιλογή είναι για $t=0$

Αν επιλέξω για $\varepsilon>0$ να έχω $\delta=\varepsilon$, τότε

αν $|c_1-c_2|<\delta=\varepsilon$, τότε $|y_{c_1}(t)-y_{c_2}(t)| \leq |c_1-c_2| < \varepsilon$

Άρα έχω συνεχή εξάρτηση λύσης από παραμέτρους.

Περίπτωση II: $|y_{c_1}(t)-y_{c_2}(t)| = |c_1-c_2|e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

Όμως εδώ δεν ισχύει ό,τι πριν, γιατί το e^{-t} γίνεται άπειρο αν $t\to-\infty$.

Απαγωγή σε άτοπο: Αν είχα συνεχή εξάρτηση θα έπρεπε για το $\varepsilon>0$ να $\exists\,\delta>0$:

$$|c_1-c_2|<\delta \Rightarrow |y_{c_1}(t)-y_{c_2}(t)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |c_1-c_2|e^{-t}<\varepsilon$$

Αν επιλέξω $|c_1-c_2|=\frac{\delta}{2}$, τότε $\frac{\delta}{2}e^{-t}<\varepsilon \quad \forall t\in\mathbb{R}$

ΑΔΥΝΑΤΟ! αφού $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t}=+\infty$.

Όχι συνεχής εξάρτηση, άλλα το πρόβλημα δεν είναι καλά τοποθετημένο.

$f_n: [a,\beta]\to\mathbb{R}$ $\quad f_n$ Riemann-ολοκληρώσιμη

& $f_n\to f$ ομοιόμορφα

$\Rightarrow f$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

ομοιόμορφη συνέχεια $\Rightarrow$ μια συνάρτηση επεκτείνεται συνεχώς στο $\mathbb{R}$

ομ. σύγκλιση $\Rightarrow$ οι ιδιότητες των συναρτήσεων διατηρούνται.

4η Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 17/10/2013

Επανάληψη Ανάλυσης:

Ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτήσεων

$f, f_n : A \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$
τότε $f_n \to f$ κατά σημείο αν $t \in A$ $f_n(t) \to f(t)$.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, t)$: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, $n \geq n_0$

$f_n \to f$ ομοιόμορφα
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, $n \geq n_0$, $\forall t \in A$.

Θεώρημα: Αν $f_n : A \to \mathbb{R}$ $n = 1, 2, \dots$ συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Longrightarrow$ f συνεχής. ($f \in C(A)$).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{s\to t} f_n(s)\right) = \lim_{s\to t}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(s)\right)$$

Θεώρημα: $f_n : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, f_n Riemann-ολοκληρώσιμη και $f_n \to f$ ομοιόμορφα
$\Longrightarrow$ $f \in \mathbb{R}[a, \beta]$ και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$

Θεώρημα: (i) $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, f_n παραγωγίσιμες
~~[illegible]~~
(ii) f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα $f_n' \to g$.
σε κάθε κλειστό διάστημα του $[a, b]$ ~~[illegible]~~
(iii) $\exists$ $t_0 \in (a, b)$: $f_n(t_0) \to f(t_0)$, $n \to +\infty$

$\Longrightarrow$ $\exists f : (a, b) \to \mathbb{R}$:
$f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα
Η f είναι παρ/μη και μάλιστα
$f'(t) = g(t)$ $\forall t \in (a, b)$

f_n ομοιόμορφη ακολουθία Cauchy:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$:
$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$
$\forall n, m \geq n_0$
$\forall t \in A$.

Θεώρημα (Arzela – Ascoli)

(Το αντίστοιχο του Bolzano-Weierstrass για συναρτήσεις)

Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής. Τότε υπάρχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία αυτής.

$f_{n_k} \to f$ ομοιόμορφα.

$f_n : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα φραγμένη όταν $\exists M > 0$: $|f_n(t)| \leq M$, $\forall t \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Η f_n είναι ισοσυνεχής ακολουθία όταν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x, y$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)|$ $\forall n = 1, 2, \dots$

Bolzano-Weierstrass

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists$ συγκλίνουσα υπακολουθία

Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Lipschitz συνεχής αν $\exists L > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad , x, y \in \mathbb{R}$$

(Είναι και σχεδόν παντού παραγωγίσιμες συναρτήσεις)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz συνεχής

$\forall [a, \beta]$, $\exists L = L(a, \beta) \geq 0$ τ.ω. $|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$ $\forall x, y \in [a, \beta]$

Π.χ. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

- Δεν είναι Lipschitz συνεχής, γιατί αν ήταν θα είχα

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq L |x - y|$$

$$\Longrightarrow |x + y| \leq L \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Παίρνοντας $x = y = L$: $2L \leq L$ δεν ισχύει!

Όμως, η f είναι τοπικά Lipschitz.

$[a, \beta]$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \underbrace{2\max(|\beta|, |a|)}_{L}$$

Έχει το πρόβλημα από λύση για $t \simeq t_0$?

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: [a,\beta] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής.
$t_0 \in (a,\beta)$
$x_0 \in (c,d)$

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(I) Το Π.Α.Τ. $x'(t) = f(t, x(t))$, $t \in (a_1, \beta_1) \subseteq (a,\beta)$
$x(t_0) = x_0$ με $t_0 \in (a_1, \beta_1)$

έχει λύση.

(II) Το πρόβλημα: $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\,ds$, $t \in (a_1, \beta_1)$

να έχει συνεχή λύση $\varphi \in C(a_1, \beta_1)$.

Στο (I) ήθελα παραγωγίσιμη λύση.
Στο (II) θέλω απλά συνεχή.

<u>Απόδ.:</u>

<u>(I) ⟹ (II) :</u>

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds\right) = x'(t) - f(t, x(t)) = 0,$$
$t \in (a_1, \beta_1)$.

$$\Longrightarrow x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \overset{(\text{σταθερή})}{=} x(t_0) - x_0 - 0 = 0, \quad t \in (a_1, \beta_1)$$

Άρα αν το Π.Α.Τ. του (I) έχει λύση, θα έχει και το (II).

<u>(II) ⟹ (I) :</u> $\exists \varphi \in C(a_1, \beta_1)$: $t_0 \in (a_1, \beta_1)$

(*) $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds \quad \forall t \in (a_1, \beta_1)$

Επειδή f, φ συνεχείς, παίρνω ότι $\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$ παρ/μη,
άρα η $\varphi(t)$ παρ/μη
(είναι ίση με το δεύτερο μέλος που είναι παρ/μη)

Παραγωγίζοντας: $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in (a_1, \beta_1)$
$\varphi(t_0) = x_0$ (για $t = t_0$ όταν (*))

Έχει λύση!!!

5η Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 22/10/2013

- $y'(t) = f(t, y(t))$, $t > a$ (1)
  $y(a) = c$ (2)

y λύση όταν y παραγωγίσιμη στα $t>a$ και συνεχής μέχρι το $t=a$ και ικανοποιεί τις (1) ως' (2).

- $x(t) = c + \int_a^t f(s, x(s))\, ds$, $t \geq a$. (*)

x λύση αν x συνεχής στο $[a, +\infty)$ και ικανοποιεί την εξίσωση (*).

Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής, τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα.

Picard

Πώς θα λύσω την $f(x) = 0$?

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_n \to p, \quad g(x_n) \to g(p)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x) + x}_{g} = x$$

$$\boxed{p = g(p)}$$

$$|g'(p)| < 1$$

Ο Picard είχε την ιδέα να ορίσουμε μια ακολουθία συναρτήσεων

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) = c + \int_a^t f(s, x_n(s))\, ds \\ x_1(t) = c \end{cases}$$

Πχ. $x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t s\, x_n(s)\, ds$, $t \in \mathbb{R}$
$x_0(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$

Αν συγκλίνει, βρίσκει λύση της Δ.Ε. $x'(t) = t\, x(t)$, $t \in \mathbb{R}$
$x(0) = 1$.

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=t \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln x(t)=\left(\frac{t^2}{2}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln x(t)-\frac{t^2}{2}\right)'=0 \Rightarrow \ln x(t)-\frac{t^2}{2}=c$$

Για $t=0$, παίρνουμε $\ln x(0)=c \Leftrightarrow c=\ln 1 \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $x(t)=e^{t^2/2}$, $t\in\mathbb{R}$.

$$x_1(t)=1+\int_0^t s\,x_0(s)\,ds=1+\int_0^t s\,ds=1+\frac{t^2}{2}$$

$$x_2(t)=1+\int_0^t s\,x_1(s)\,ds=1+\int_0^t s\cdot\left(1+\frac{s^2}{2}\right)ds=1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\cdot 4}$$

$$x_3(t)=1+\int_0^t s\,x_2(s)\,ds=1+\int_0^t s\left(1+\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{2\cdot 4}\right)ds=$$

$$=1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\cdot 4}+\frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6}=1+\frac{t^2}{2}+\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^3}{2\cdot 3}$$

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!},\quad t\in\mathbb{R}.$$

$$x_n(t)\longrightarrow x_\infty(t)=e^{t^2/2}$$ ομοιόμορφα για κάθε $t\in[a,\beta]$.

Έστω $f:[a,\beta]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$, συνεχής με $|f(t,x)|\le M$, $t\in[a,\beta]$, $x\in[c,d]$

και Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.
Ειδικότερα, $\exists L>0$:

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y| \quad \forall t\in[a,\beta],\ \forall x,y\in[c,d].$$

Τότε το Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), & t>a \\ y(a)=\xi \end{cases}$

έχει λύση στο διάστημα $[a,\beta^*]$, όπου $\beta^* = \min\{\beta, a+\frac{\xi-c}{M}, a+\frac{d-\xi}{M}, a+\frac{1}{2L}\}$

Απόδ: Θα αποδείξουμε αρχικά ύπαρξη συνεχούς συνάρτησης της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(s,x(s))\,ds \quad , \quad t \in [a,\beta^*].$$

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Picard (αναδρομική ακολουθία Picard)

$$x_{n+1}(t) = \xi + \int_a^t f(s,x_n(s))\,ds \quad , t \in [a,\beta^*].$$

Προς τούτο απαιτείται να ορίζεται η αναδρομική ακολουθία, ειδικότερα πρέπει

$$c \le x_n(t) \le d \quad , \forall t \in [a,\beta^*].$$

$$|x_{n+1}(t) - \xi| = \left| \int_a^t f(s,x_n(s))\,ds \right| \le \int_a^t |f(s,x_n(s))|\,ds \le \int_a^t M\,ds = M(t-a) \le M(\beta^*-a)$$

$$-M(\beta^*-a) \le x_{n+1}(t) - \xi \le M(\beta^*-a)$$

$$\xi - M(\beta^*-a) \le x_{n+1}(t) \le \xi + M(\beta^*-a)$$

Θα πρέπει $c \le \xi - M(\beta^*-a)$ κι' $\xi + M(\beta^*-a) \le d$

$$\Rightarrow \beta^* \le a + \frac{\xi - c}{M} \qquad \Rightarrow \beta^* \le \frac{d-\xi}{M} + a$$

Τότε η αναδρομική ακολουθία ορίζεται καλά $\forall t \in [a,\beta^*]$.

$$x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t) = \xi + \int_a^t f(s,x_{n+1}(s))\,ds - \xi - \int_a^t f(s,x_n(s))\,ds =$$

$$= \int_a^t \Big(f(s,x_{n+1}(s)) - f(s,x_n(s))\Big)\,ds.$$

$$\Rightarrow |x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| = \left| \int_a^t \Big(f(s,x_{n+1}(s)) - f(s,x_n(s))\Big)\,ds \right| \le$$

$$\le \int_a^t |f(s,x_{n+1}(s)) - f(s,x_n(s))|\,ds \le \int_a^t L\,|x_{n+1}(s) - x_n(s)|\,ds$$

$$|x_{n+2}(t)-x_{n+1}(t)| \le L\int_a^t |x_{n+1}(s)-x_n(s)|\,ds$$

$c \le x_1(t) \le d$

$c-\xi \le x_1(t)-\xi \le d-\xi$

$n=0$: $$|x_2(t)-x_1(t)| \le L\int_a^t |x_1(s)-\xi|\,ds$$

$$\le L\cdot k\,(t-a)$$

$Max(d-\xi, \xi-c)=k$

$n=1$: $$|x_3(t)-x_2(t)| \le L\int_a^t Lk(s-a)\,ds = L^2 k\,\frac{(t-a)^2}{2}$$

$n=2$: $$|x_4(t)-x_3(t)| \le L^3 k\,\frac{(t-a)^3}{2\cdot 3} = L^3 k\,\frac{(t-a)^3}{3!}$$

Επαγωγικά θα πάρουμε: $|x_{n+2}(t)-x_{n+1}(t)| \le k\,\frac{(L(t-a))^{n+1}}{(n+1)!} \le k\,\frac{(L(\beta^*-a))^{n+1}}{(n+1)!}$

Πώς θα δείξω ότι συγκλίνει; Cauchy

X_n ακολουθία Cauchy αν $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$:
$|X_m(t)-X_n(t)|<\varepsilon \quad \forall t, \quad \forall n,m \ge n_0$

Έστω $m>n$.

$$|X_m(t)-X_n(t)| = |X_m(t)-X_{m-1}(t)+X_{m-1}(t)-X_{m-2}(t)+\dots+X_{n+1}(t)-X_n(t)|$$

$$\le |X_m(t)-X_{m-1}(t)|+\dots+|X_{n+1}(t)-X_n(t)| \le$$

$$\le k\left[\frac{(L(\beta^*-a))^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{(L(\beta^*-a))^{m-2}}{(m-2)!}+\dots+\frac{(L(\beta^*-a))^{n}}{n!}\right]$$

$$\le k\,\frac{(L(\beta^*-a))^n}{n!}\underbrace{\left[\frac{n!}{(m-1)!}(L(\beta^*-a))^{m-n-1}+\dots+1\right]}_{H}$$

$$H \le (L(\beta^*-a))^{m-n-1}+(L(\beta^*-a))^{m-n-2}+\dots+1 \le \frac{1}{1-L(\beta^*-a)}$$

Για να συγκλίνει η $\sum_{k=0}^{\infty}(L(\beta^*-a))^k$, πρέπει $|L(\beta^*-a)|<1$.

Η ακολουθία $a_n=\frac{(L(\beta^*-a))^n}{n!}$ συγκλίνει στο 0?

Ναι γιατί η $\frac{x^n}{n!}$ πάει πάντα στο 0 για κάθε x, αφού $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ συγκλίνει η σειρά, άρα η ακολουθία $\to 0$.

Άρα βρίσκω τον τελευταίο περιορισμό του β^*: $L(\beta^*-a) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta^* \le a + \frac{1}{2L}$

Άρα $|X_m(t)-X_n(t)| \le \frac{k\,(L(\beta^*-a))^n}{n!} H \le \frac{2k\,(L(\beta^*-a))^n}{n!}$ Άρα η X_n Cauchy

Οπότε $X_n \longrightarrow X_\infty$ ομοιόμορφα $(n\to\infty)$ στο $[a,\beta^*]$.

$c \le X_n(t) \le d \implies c \le X_\infty(t) \le d$ (και $X_{n+1} \to X_\infty$)

Επειδή $x_{n+1}(t) = \xi + \int_a^t f(s,x_n(s))\,ds$, θέλω να πάρω όρια.

Γιατί να έχω $f(s,x_n(s)) \longrightarrow f(s,x(s))$ ομοιόμορφα???

$|f(s,x_n(s)) - f(s,x_n(s))| \le L\,|x_n(s)-x(s)|$

οπότε

$f(\cdot,x_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot,x(\cdot))$ ομοιόμορφα $n\to+\infty$.

Παίρνοντας όρια: $X_\infty(t) = \xi + \int_a^t f(s,x_\infty(s))\,ds$, $t\in[a,\beta^*]$

με X_∞ συνεχή συνάρτηση (ως ομοιόμορφο όριο συνεχών)

Λήμμα (του Gronwall): Έστω $g:[a,b]\to[0,+\infty)$ συνεχής και $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί $x(t) \le c + \int_a^t g(s)\cdot x(s)\,ds$, $t\in[a,b]$

Τότε

Λήμμα του Gronwall (σε διαφορική μορφή): Έστω $g:[a,b]\to[0,+\infty)$ συνεχής και $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a,b), συνεχής στο $[a,b]$.

Αν $x'(t) \le g(t)\cdot x(t)$, $a<t\le b$

και $x(a)=c$,

τότε $x(t) \le c\cdot e^{\int_a^t g(s)ds}$

Βρίσκω τον πολ/στή Euler: $e^{-\int_a^t g}$

$e^{-\int_a^t g(s)ds}\,x'(t) - e^{-\int_a^t g(s)ds}\,g(t)x(t) \le 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\int_a^t g(s)ds} \ldots\right)$

6^{η} Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 24/10/2013

$y'(t) = f(t, y(t))$
$y(a) = \xi$

όπου $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής
$|f(t,y(t))| \le M$

f Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, $\exists L>0$
$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|$, $x,y \in [c,d]$, $t \in [a,b]$

Τότε υπάρχει λύση $y : [a,b^*] \to \mathbb{R}$, όπου $b^* = \min\{b, a+\frac{d-\xi}{M}, a+\frac{\xi-c}{M}, a+\frac{1}{2L}\}$

$$y_{n+1}(t) = \xi + \int_a^t f(s, y_n(s))\,ds$$

$\{y_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b^*]$

Εναλλακτικά: Χρήση του Θεωρ. Arzela-Ascoli. $\{y_n\}$
Αν είναι ομ. φραγμένη: $\exists A>0 : |y_n(t)| \le A$, $\forall n$, $\forall t \in [a,b^*]$

Ισοσυνεχής $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall t,s \in [a,b]$, $|t-s|<\delta \Rightarrow |y_n(t)-y_n(s)|<\varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Τότε υπάρχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλ. $\exists n_k \to +\infty$ με y_{n_k} συγκλίνει ομοιόμορφα, $k\to\infty$ $(y_{n_k} \to y)$

$$y_{n+1}(t) - y_{n+1}(s) = \xi + \int_a^t f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta - \xi - \int_a^s f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta =$$
$$= \int_s^t f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta$$

$$\Rightarrow |y_{n+1}(t) - y_{n+1}(s)| = \left|\int_s^t f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta\right| \le \int_s^t |f(\vartheta, y_n(\vartheta))|\,d\vartheta \le M(t-s) < \varepsilon,$$
$n = 1, 2, \dots$

$$y_{n_k+1}(t) = \xi + \int_a^t f(s, y_{n_k}(s))\,ds$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty}$$

$$\int_a^t f(s, y(s))\,ds$$

Πού συγκλίνει η y_{n_k+1}? Στόχος: $|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ομ.}} 0$

$$y_{n+1}(t) = \xi + \int_a^t f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta$$

$$y_n(t) = \xi + \int_a^t f(\vartheta, y_{n-1}(\vartheta))\,d\vartheta$$

$$\Longrightarrow |y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \left| \int_a^t \big(f(\vartheta, y_n(\vartheta)) - f(\vartheta, y_{n-1}(\vartheta))\big)\,d\vartheta \right| \le$$

$$\le \int_a^t |f(\vartheta, y_n(\vartheta)) - f(\vartheta, y_{n-1}(\vartheta))|\,d\vartheta \le$$

$$\le \int_a^{b^*} L\,|y_n(\vartheta) - y_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta.$$

Για $n=2$: $|y_2(t) - y_1(t)| = \left|\xi + \int_a^t f(s,\xi)\,ds - \xi\right| \le M(t-a) \le M(b^*-a)$

$n=3$: $|y_3(t) - y_2(t)| \le L\int_a^t |y_2(\vartheta) - y_1(\vartheta)|\,d\vartheta \le ML\dfrac{(t-a)^2}{2!}$

$n=4$: $|y_4(t) - y_3(t)| \le L\int_a^t |y_3(\vartheta) - y_2(\vartheta)|\,d\vartheta \le ML^2\dfrac{(t-a)^3}{3!}$

Επαγωγή: $|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \le ML^{n-1}\dfrac{(t-a)^n}{n!} \le \dfrac{M}{L}\dfrac{(L(b^*-a))^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left(\text{γιατί } \dfrac{x^n}{n!} \longrightarrow 0\right)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}(t) - y_n(t)) = 0$ ομοιόμορφα (δεν εξαρτάται από το t).

Άρα $y_{n_k+1} - y_{n_k} \longrightarrow 0 \Longrightarrow y_{n_k+1} \longrightarrow y$.

Λήμμα (του Gronwall): Αν x παραγωγίσιμη στο $(a,b]$ και συνεχής στο $[a,b]$, που επιπρόσθετα ικανοποιεί:

$$x'(t) \le g(t)x(t) \quad , a < t \le b$$
$$x(a) = \xi \qquad (\text{με } g:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ συνεχής})$$

$$\Longrightarrow x(t) \le \xi e^{\int_a^t g(s)ds} \quad , a \le t \le b.$$

Λήμμα (του Gronwall) (ολοκληρωτική μορφή): Έστω $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g:[a,b]\to(0,+\infty)$ συνεχής, τέτοιες ώστε

$$x(t) \le x(a) + \int_a^t g(s)\,x(s)\,ds$$

$$\Longrightarrow x(t) \le x(a)\, e^{\int_a^t g(s)ds}$$

Πώς αποδεικνύεται?
ΑΣΚΗΣΗ!

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $y_1, y_2 : [a,\eta] \subseteq [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο λύσεις του Π.Α.Τ.
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > a$$
$$y(a) = \xi,$$
όπου $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλ. $|f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y|$ $\forall t\in[a,b]$, $\forall x,y\in[c,d]$

όπου $c \le y_1(t) \le d$, $c \le y_2(t) \le d$, $\forall t \in [a,\eta]$,

Τότε $y_1(t) = y_2(t)$, $\forall t\in[a,\eta]$.

Απόδ.: $\sigma(t) = (y_2(t) - y_2(t))^2 \qquad \sigma:[a,\eta]\to\mathbb{R}$

Τότε η σ είναι παρ/μη με $\sigma'(t) = 2(y_1(t)-y_2(t))(y_1'(t)-y_2'(t)) =$

$$= 2(y_1(t)-y_2(t))(f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))) \le 2|y_1(t)-y_2(t)|\,|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|$$

Λήμμα (του Gronwall): Αν x παραγωγίσιμη στο $(a,b]$ και συνεχής στο $[a,b]$, που επιπρόσθετα ικανοποιεί:

$$x'(t) \le g(t)x(t), \quad a<t\le b$$
$$x(a)=\xi$$

(με $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής)

$$\Longrightarrow x(t) \le \xi e^{\int_a^t g(s)ds}, \quad a\le t\le b.$$

Λήμμα (του Gronwall) (ολοκληρωτική μορφή): Έστω $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g:[a,b]\to(0,+\infty)$ συνεχής, τέτοιες ώστε

$$x(t) \le x(a) + \int_a^t g(s)x(s)\,ds$$

$$\Longrightarrow x(t) \le x(a)e^{\int_a^t g(s)ds}$$

Πώς αποδεικνύεται? ΑΣΚΗΣΗ!

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $y_1, y_2 : [a,\eta]\subseteq[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι δύο λύσεις του Π.Α.Τ. $\quad y'(t)=f(t,y(t)),\ t>a$
$\quad y(a)=\xi$,

όπου $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλ. $|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y| \quad \forall t\in[a,b]$
$\forall x,y\in[c,d]$

όπου $c\le y_1(t)\le d$, $c\le y_2(t)\le d$, $\forall t\in[a,\eta]$,

Τότε $y_1(t)=y_2(t)$, $\forall t\in[a,\eta]$.

Απόδ.: $\quad \sigma(t)=\left(y_1(t)-y_2(t)\right)^2 \qquad \sigma:[a,\eta]\to\mathbb{R}$

Τότε η σ είναι παρ/μη με $\sigma'(t)=2\left(y_1(t)-y_2(t)\right)\left(y_1'(t)-y_2'(t)\right)=$

$$=2\left(y_1(t)-y_2(t)\right)\left(f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\right)\le 2\,|y_1(t)-y_2(t)|\,|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|$$

$\leq 2L\,|y_1(t)-y_2(t)|^2$

$\Rightarrow \sigma'(t) \leq 2L\,\sigma(t)$, $a<t\leq n$

Από το Λήμμα του Gronwall, $\sigma(t) \leq \sigma(a)\cdot e^{2L(t-a)}$, $\forall t\in[a,n]$

Όμως, $\sigma(a) = (y_1(a)-y_2(a))^2 = (\xi-\xi)^2 = 0$

$\Rightarrow \sigma(t) \leq 0$, $\forall t\in[a,b]$

Όμως $\sigma(t)\geq 0$ (είναι τετράγωνο)

$\Rightarrow \sigma(t)=0 \Rightarrow y_1(t)\equiv y_2(t)$.

(Το Θεώρημα ύπαρξης λύσης είναι το Θεώρημα Picard-Lindelöf)

Φυλλάδιο 1

(2) $y'(t) = t\,y^2(t)$, $t>0$
$y(0)=1$

$y(0)>0$, άρα υπάρχει διάστημα (λόγω συνέχειας) $[0,\delta]$ όπου $y(t)>0$ $\forall t\in[0,\delta]$.

$\dfrac{y'(t)}{y^2(t)} = t$

Παρατηρώ $y'(t)\geq 0$ άρα αύξουσα, άρα $y(t)\geq 1$.

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{y(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}+\frac{t^2}{2}\right)=0$$

Άρα $\exists c\in\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{y(t)}+\dfrac{t^2}{2}=c$ Για $t=0$: $\dfrac{1}{1}+0=c \Rightarrow c=1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{y(t)} + \frac{t^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - \frac{t^2}{2} = \frac{2-t^2}{2}$$

Θέλω $2-t^2 \neq 0$ κ' αφού $y(t)>0$, θέλω $\frac{2-t^2}{2} > 0 \Rightarrow 2-t^2>0 \Rightarrow t^2<2$
$\Rightarrow t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Άρα παίρνω $0 \leq t < \sqrt{2}$.

Για $t \in [0, \sqrt{2})$, $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$

(3) $y'(t) + a t y(t) > 0$, $t>0$ Ν.δ.ο. $y(t)$, $t>0$
$y(0) = 0$

Αυτό που θέλω μπορεί να προκύψει από μονοτονία.
Γι' αυτό θα την κάνω τέλειο διαφορικό.

Πολλαπλασιαστής Euler: $\int at\,dt = a\int t\,dt = a\frac{t^2}{2}$

$e^{a\frac{t^2}{2}}$

$$e^{a\frac{t^2}{2}} y'(t) + a t e^{a t^2/2} y(t) > 0 \Rightarrow \left(e^{a\frac{t^2}{2}} y(t)\right)' > 0 \quad , t>0$$

$\Rightarrow$ Η $e^{a t^2/2} y(t)$ γν. αύξουσα (και στο μηδέν).

Θεωρούμε την $g(t) = e^{a t^2/2} y(t)$, $t \geq 0$, γν. αύξουσα.

Αν $t>0$, τότε $g(t) > g(0) \Rightarrow e^{a\frac{t^2}{2}} y(t) > e^{0} \cdot y(0) = 0$

Όμως $e^{a\frac{t^2}{2}} > 0 \ \forall t>0$, άρα $y(t) > 0$

① $y'(t) + a y(t) = b \quad , \; t>0$

$y(0) = c$

Θα την κάνω τέλειο διαφορικό, γι' αυτό πολ/ζω με πολ/στή Euler

$$e^{at} y'(t) + e^{at} a y(t) = b e^{at} \Rightarrow \left(e^{at} y(t)\right)' = \left(\frac{b}{a} e^{at}\right)'$$

$$\Rightarrow e^{at} y(t) - \frac{b}{a} e^{at} = e^{a\cdot 0} \cdot y(0) - \frac{b}{a} e^{a0} = c - \frac{b}{a} \qquad \forall t>0$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(c - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} e^{at}\right) e^{-at} \Rightarrow y(t) = \left(c - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\left(c - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a}$$

7η Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 29/10/2013

Θεώρημα (Peano): Έστω $f: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $|f(t,x)| \le M$, $t\in[a,b]$, $x\in[c,d]$.

Τότε το Π.Α.Τ.

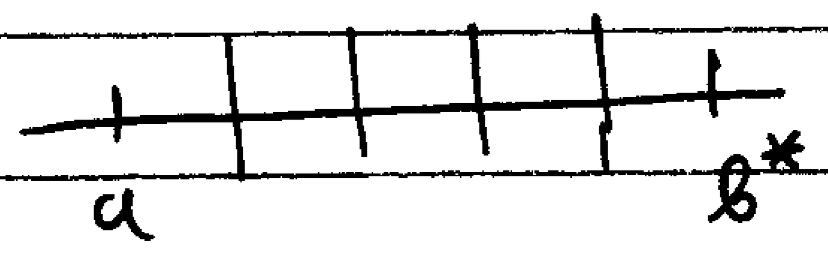
$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad a<t$$
$$y(a) = \xi$$

έχει λύση για κατάλληλα μικρό διάστημα. Ειδικότερα, θα αποδείξουμε ότι έχει λύση στο διάστημα $[a,b^*]$, $b^* = \min\left(b, \frac{d-\xi}{M}, \frac{\xi-c}{M}\right)$.

Απόδ. (Tonelli):

$$y_n(t) = \begin{cases} \xi, & a\le t\le a+\frac{b^*-a}{n} \\ \xi + \int_a^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,y_n(s))\,ds, & a+\frac{b^*-a}{n} \le t \le b^* \end{cases}$$

Η y_n ορίζεται καλά.



Χωρίζω σε n ίσα κομμάτια.
Στο $\left[a, a+\frac{b^*-a}{n}\right]$ ορίζεται καλά.
Για το διάστημα $t\in\left[a+\frac{b^*-a}{n}, a+2\frac{b^*-a}{n}\right]$:

$t-\frac{b^*-a}{n} \in \left[a, a+\frac{b^*-a}{n}\right]$, οπότε

$y_n(t) = \xi + \int_a^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,\xi)\,ds$ ορίζεται καλά.

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η ακολουθία, κάθε φορά παίρνω το διάστημα και το ολοκλήρωμα πέφτει στο προηγούμενο διάστημα, όπου στο προηγούμενο βήμα είχα δείξει ότι οριζόταν.

$\xi + \int_a^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,y_n(s))\,ds$, πρέπει $\int_a^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,y_n(s))\,ds \le b^*-\xi$.

$$\Rightarrow \left|\int_a^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(s,y_n(s))\,ds\right| \le M\cdot\left(t-\frac{b^*-a}{n}-a\right) \le M\cdot\left(b^*-a-\frac{b^*-a}{n}\right) \le M\cdot(b^*-a) \le b^*-\xi.$$

Η y_n είναι καλά ορισμένη.

Η y_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη, και μάλιστα $c \le y_n(t) \le d$, $n=1,2,\dots$
Απομένει να ελέγξουμε την ισοσυνέχεια της y_n, και τότε από το Θεώρημα Arzela-Ascoli θα υπάρχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία

$$|y_n(t)-y_n(s)| = \left|\int_{s-\frac{b^*-a}{n}}^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta\right| \le M|t-s|$$

Αν $t,s \in \left[a+\frac{b^*-a}{n}, b^*\right]$

Οπότε $\exists\, y_{n_k} \to y$ ομοιόμορφα $n\to+\infty$ $[a,b^*]$

$y_{n_k}(a) = \xi$, $k\in\mathbb{N}$

$y_{n_k}(t) = \xi + \int_a^{t-\frac{b^*-a}{n}} f(\vartheta, y_{n_k}(\vartheta))\,d\vartheta$, $a<t\le b^*$, k μεγάλο ώστε $a+\frac{b^*-a}{n_k}<t$

$$y_{n_k}(t) = \xi + \int_a^t f(\vartheta, y_{n_k}(\vartheta))\,d\vartheta - \underbrace{\int_{t-\frac{b^*-a}{n}}^t f(\vartheta, y_{n_k}(\vartheta))\,d\vartheta}_{\to 0}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y(t) = \xi + \int_a^t f(\vartheta, y(\vartheta))\,d\vartheta$$

$$\left|\int_{t-\frac{b^*-a}{n}}^t f(\vartheta, y_n(\vartheta))\,d\vartheta\right| \le M\cdot\frac{b^*-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Άρα, περνώντας στα όρια έχουμε κατασκευάσει λύση της ολοκληρωτικής, άρα και της Δ.Ε.

$f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής
Λύση στο $[a,b^*]$.

$$\begin{cases} y'(t) = t y^2(t) \\ y(0)=1 \end{cases}, \quad t>0$$

~~[illegible]~~ $f(t,y) = ty^2$, $t \in [0,1]$, $y \in [0,2]$

$f(t,y) \le 1 \cdot 2^2 = 4$

<u>Θ. Peano</u>: Έχει λύση στο $[0, b^*]$, όπου $b^* = \min\left(b, \frac{d-\xi}{M}, \frac{\xi - c}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Άρα στο $[0, \frac{1}{4}]$. Είναι το μεγαλύτερο? όχι
Πότε θα σταματήσει αυτή η διαδικασία?

Η λύση του προβλήματος θα είναι διάστημα $[a, T) \subseteq [a, b]$ (μπορεί και να είναι το $[a, b]$)

Αν έχω λύση σε κλειστό, πάντα επεκτείνεται περαιτέρω. Αν είναι ανοιχτό, τότε αναγκαστικά έχουμε έκρηξη λύσης (blow-up), δηλ.
$$\lim_{t \to T^-} |y(t)| = +\infty$$

<u>Λήμμα</u>: Εάν $\overline{\lim_{t \to T^-}} |y(t)| < +\infty$, η λύση ορίζεται για $t = T$.

$\Longleftrightarrow \quad y(t) = \xi + \int_a^t f(s, y(s))\, ds, \quad t \in [a, T)$

<u>Απόδ</u>: Θα αποδείξουμε ότι η y είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, T)$

Όμως για $t, s \in [a, T)$,
$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \xi + \int_a^t f(\vartheta, y(\vartheta))\, d\vartheta \\ y(s) &= \xi + \int_a^s f(\vartheta, y(\vartheta))\, d\vartheta \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$|y(t)-y(s)| = \left|\int_s^t f(\vartheta, y(\vartheta))\, d\vartheta\right|$$

$$\lim_{t\to T^-} y(t) \Longrightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}: \ m \le y(t) \le M \quad \forall t \in [a,T)$$

$f: [a,T]\times[m,M] \to \mathbb{R}$

Αν $\quad |f(t,y)| \le \tilde{M}, \quad t\in[a,T)$, $y \in [m,M]$

Τότε $\quad |y(t)-y(s)| \le \tilde{M}\,|t-s|$. Άρα η y ομοιόμ. συνεχής.

Παίρνω όριο $t\to T^-$:

$$y(T) = \xi + \int_a^T f(s,y(s))\,ds$$

Τώρα, το Π.Α.Τ. $\quad \bar{y}(T) = y(T)$

$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad t > T$$

έχει λύση για κατάλληλα μικρό διάστημα, άρα η λύση μας ορίζεται και μετά το T.

Π.Α.Τ.: $y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > a$

$y(a) = c_1$

$y'(a) = c_2$

$y(t) = x_1(t)$

$y'(t) = x_2(t)$

$y''(t) = x_2'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t))$

Σύστημα Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης.

$x_1'(t) = x_2(t)$

$x_2'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t))$

$x_1(a) = c_1$

$x_2(a) = c_2$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ f(t, x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$|y(t)-y(s)| = \left|\int_s^t f(\vartheta, y(\vartheta))\, d\vartheta\right|$$

$\lim\limits_{t\to T^-} y(t) \Rightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R} : \; m \le y(t) \le M \quad \forall t \in [a,T)$

$f : [a,T] \times [m,M] \to \mathbb{R}$

Αν $\quad |f(t,y)| \le \tilde{M}, \quad t \in [a,T), \; y \in [m,M]$

Τότε $\quad |y(t)-y(s)| \le \tilde{M}\,|t-s|$. Άρα η y ομοιόμ. συνεχής.

Παίρνω όριο $t \to T^-$:

$$y(T) = \xi + \int_a^T f(s, y(s))\, ds$$

Τώρα, το Π.Α.Τ. $\quad \bar{y}(T) = y(T)$

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > T$$

έχει λύση για κατάλληλα μικρό διάστημα, άρα η λύση μας ορίζεται και μετά το T.

Π.Α.Τ.: $y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > a$

$y(a) = c_1$

$y'(a) = c_2$

$y(t) = x_1(t)$

$y'(t) = x_2(t)$

$y''(t) = x_2'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t))$

Σύστημα Δ.Ε. 1ης τάξης.

$x_1'(t) = x_2(t)$

$x_2'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t))$

$x_1(a) = c_1$

$x_2(a) = c_2$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ f(t, x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}'(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t)) \qquad \underline{X}'(a) = \underline{c}$$

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \qquad \underline{f}(t, \underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \underline{x}) \\ \vdots \\ f_{m}(t, \underline{x}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\|\underline{X}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2} \quad \text{αν} \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση: $\underline{X}(t) = \underline{c} + \int_a^t \underline{f}(s, \underline{x}(s))\, ds$

$$x_1(t) = c_1 + \int_a^t f_1(s, x_1(s), x_2(s), \ldots, x_m(s))\, ds$$

$$\vdots$$

$$x_m(t) = c_m + \int_a^t f_m(s, x_1(s), \ldots, x_m(s))\, ds.$$

Ύπαρξη λύσεων: αν $\underline{f}$ συνεχής. $\underline{f} : [a,b] \times [m_1, M_1] \times [m_2, M_2] \times \ldots [m, M] \to \mathbb{R}^m$:

$t \in [a, b^*]$ με $b^* = \min(b, \ldots)$

Συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή:

$$\|\underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y})\| \leq L \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

a)

$8^{\text{η}}$ Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 31/10/2013

$x'(t) = f(t, x(t))$
$x(t_0) = c_0$

$x : [a,b] \to \mathbb{R}^m$
$f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

Τοπικά συνθήκη Lipschitz: $f(x) = x^2$ $\quad f : [m, n] \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Μονοσήμαντο
$\Rightarrow$ f συνεχής.

Έκρηξη της λύσης: $\overline{\lim_{t \to T^-}} \| \underline{x}(t) \| = +\infty$

Δηλ. $\exists \ t_n \to T^-$ τ.ω. $\lim_{n \to \infty} \| \underline{x}(t_n) \| = +\infty$

$x'(t) = f(t, x(t))$, $t > a$
$x(a) = c$

Καλή τοποθέτηση:
- Ύπαρξη λύση
- Μονοσήμαντο λύσεων
- Συνεχής εξάρτηση λύσεων από παραμέτρους.

Μια ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη: f τοπικά συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

Συνθήκη Nagumo: $\exists \ \varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \varphi(|x-y|)$
και φ είναι τέτοια ώστε $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon} \frac{ds}{\varphi(s)} = +\infty$

Κεφάλαιο 5?

$y'(t) = f(t, y(t))$
$y(a) = c$

Θεώρημα: Έστω $f: [a,b]\times[m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής και Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλ. $\exists L>0$:
$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|$$
και $x(t)$, λύση του προβλήματος
$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad a < t \leq b$$
$$x(a) = c_1$$
και $y(t)$, λύση του
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad a < t \leq b$$
$$y(a) = c_2$$

Υποθέτουμε $m \leq x(t) \leq M$, $m \leq y(t) \leq M$, $t \in [a,b]$.

Τότε ισχύει: $|x(t)-y(t)| \leq |c_1 - c_2| e^{L(t-a)}$, $t\in[a,b]$.

Απόδ.: Έστω $\sigma: [a,b]$, με τύπο $\sigma(t) = (x(t)-y(t))^2$, $t\in[a,b]$
Τότε η σ είναι συνεχής στο $[a,b]$,
παραγωγίσιμη στο $(a,b]$.
Για $a<t\leq b$: $\sigma'(t) = 2(x(t)-y(t))(x'(t)-y'(t))$
$= 2(x(t)-y(t))\cdot(f(t,x(t)) - f(t,y(t))) \leq$

$$\leq 2|x(t)-y(t)|\,|f(t,x(t))-f(t,y(t))| \leq 2L|x(t)-y(t)|^2.$$

Δηλαδή $\sigma'(t) \leq 2L\sigma(t)$, $a<t\leq b$.
$\sigma(a) = (c_1-c_2)^2$.

$\xrightarrow[\text{Gronwall}]{\text{Λήμμα του}}$ $\sigma(t) \leq \sigma(a)\cdot e^{2L(t-a)}$, $t\in[a,b]$

$$\Longrightarrow (x(t)-y(t))^2 \le (c_1-c_2)^2 e^{2L(t-a)}$$

$$\Longrightarrow |x(t)-y(t)| \le |c_1-c_2|\, e^{L(t-a)} \quad , \quad t\in[a,b].$$

Άρα $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: \ |x(a,c_1)-x(a,c_2)|<\delta \Longrightarrow |x(t,c_1)-x(t,c_2)|<\varepsilon, \quad t\in[a,b].$

$$\left(\delta = \frac{\varepsilon}{e^{L(b-a)}}\right)$$

(Κριτήριο Σύγκρισης)

Πρόταση: Έστω $f:[a,b]\times[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής, Lipschitz συνεχής στη δεύτερη μεταβλητή,

δηλ. $\exists L>0: \ |f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y|, \quad t\in[a,b],\ x,y\in[m,M].$

Έστω $x\in C[a,b]\cap D(a,b]$ (συνεχής στο $[a,b]$ και παρ/μη στο $(a,b]$)
που ικανοποιεί $x'(t) \le f(t,x(t)), \quad a<t\le b$

και

$y\in C[a,b]\cap D(a,b]$ που ικανοποιεί $y'(t) = f(t,y(t)), \quad a<t\le b$

Εάν επιπρόσθετα $y(a)\ge x(a)$, τότε

$$\boxed{y(t)\ge x(t)} \quad , \quad t\in[a,b].$$

Απόδ: Την επόμενη φορά

Φυλλάδιο 2

③ $y'(t) = y^2(t), \quad t>0$
$y(0)=0$

Έστω πως δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε $\exists t_0>0: \ y(t_0)\neq 0$.

$\Rightarrow (x(t)-y(t))^2 \le (c_1-c_2)^2 e^{2L(t-a)}$

$\Rightarrow |x(t)-y(t)| \le |c_1-c_2| e^{L(t-a)}$, $t \in [a,b]$

Άρα $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: |x(a,c_1)-x(a,c_2)|<\delta \Longrightarrow |x(t,c_1)-x(t,c_2)|<\varepsilon$, $t\in[a,b]$.

$\left(\delta = \frac{\varepsilon}{e^{L(b-a)}}\right)$

(Κριτήριο Σύγκρισης)

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f: [a,b]\times[m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής, Lipschitz συνεχής στη δεύτερη μεταβλητή,

δηλ. $\exists L>0: \quad |f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y|$, $t\in[a,b]$, $x,y\in[m,M]$.

Έστω $x \in C[a,b] \cap D(a,b]$ (συνεχής στο $[a,b]$ και παράγωγος στο $(a,b]$).

που ικανοποιεί $x'(t) \le f(t,x(t))$, $a<t\le b$

και

$y\in C[a,b]\cap D(a,b]$ που ικανοποιεί $y'(t) = f(t,y(t))$, $a<t\le b$

Εάν επιπρόσθετα $y(a)\ge x(a)$, τότε

$\boxed{y(t) \ge x(t)}$, $t\in[a,b]$.

Απόδ: Την επόμενη φορά.

Φυλλάδιο 2.

(3) $y'(t) = y^2(t)$, $t>0$
$y(0)=0$

Έστω πως δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε $\exists t_0>0 : y(t_0)\neq 0$.

(a,b) $(a>0)$

Τότε υπάρχει διάστημα γύρω από το t_0, λόγω συνέχειας της y στο t_0, όπου

$$y(t)\neq 0 \quad \forall\, t\in(a,b).$$

Για $t\in(a,b)$: $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)}=1 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{y(t)}\right)'=(t)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{y(t)}+t\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{1}{y(t)}+t=c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(t)}=c-t$$

Επειδή $y(t)\neq 0$, ισχύει $c-t\neq 0$

$$y(t)=\frac{1}{c-t}, \quad t\in(a,b)$$

<u>1η Περίπτωση:</u> $c\leq 0$

Έχουμε $y(t)=\dfrac{1}{c-t}$ για κάθε $t>0$

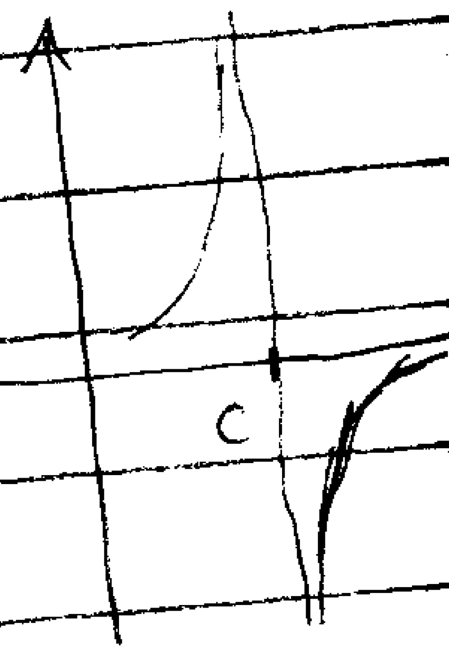
Πρέπει η y συνεχής στο 0, άρα πρέπει

$\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=y(0)=0$

- Αν $c=0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=-\infty$
- Αν $c<0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=\dfrac{1}{c}$

Αδύνατο να έχω $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=0$.

<u>2η Περίπτωση:</u> $c>0$ $\qquad y(t)=\dfrac{1}{c-t}$



- $(c,+\infty)$: αντίφαση, επειδή η y δεν ορίζεται για $t=c$.
- $(0,c)$: Παίρνω τότε $y(t)=\dfrac{1}{c-t}$, $t\in(0,c)$

Πρέπει $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=y(0)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{c-t}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{c}=0$ δεν υπάρχει τέτοιο c.

Άρα, σε κάθε περίπτωση έχω αντίφαση.

Αλλιώς: $t+\frac{1}{y(t)} = c = t_0 + \frac{1}{y(t_0)} \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = t_0 - t + \frac{1}{y(t_0)}$ (*)

Στο (a,b) $y \uparrow$ $(y'(t) = y^2(t) > 0)$

Γενικά, $y \uparrow$ (αύξουσα, όχι απαραίτητα γνήσια)

Άρα μπορώ να έχω ότι στο (a,b) $y(t) \geq y(0) = 0$

(*) $\Rightarrow$ $y(t) = \frac{1}{t_0 - t + \frac{1}{y(t_0)}}$.

$\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t_0 - t + \frac{1}{y(t_0)}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t_0 + \frac{1}{y(t_0)}} = 0$ Αδύνατο.

Αλλιώς:

$f(y) = y^2$

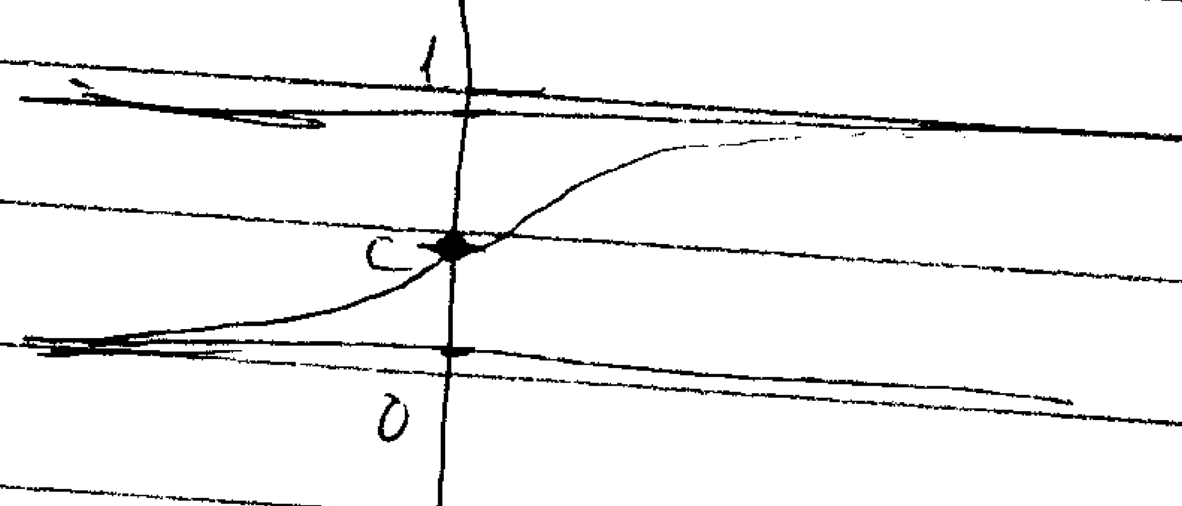
$M > 0$

$[-M, M]$ $\quad |f(x) - f(y)| \leq 2M|x-y|$

) $y'(t) = y(t) - y^2(t)$

$y(0) = c$

$c \in [0,1]$ | $c = 0$, μια λύση η $y(t) \equiv 0$



Δεν έχω συνεχή εξάρτηση!

Αν $c \in [a,b]$? $\quad 0 < a \leq c \leq b < 1$

Τότε έχω συνεχή εξάρτηση! Γιατί? Φράγμα?

$|y_{c_1}(t) - y_{c_2}(t)| \leq K|c_1 - c_2|$

$9^{η}$ Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 05/11/2013

Θεώρημα: Έστω $x \in C[a,\beta] \cap D(a,\beta]$, που ικανοποιεί
$$x'(t) \leq f(t, x(t)) \quad , a<t\leq\beta$$
και y λύση του
$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , a<t\leq\beta$$
$$y(a) = c$$
όπου $f: [a,\beta]\times[m,M] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλ. $\exists L>0$:
$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall x,y \in [m,M],\ t\in[a,\beta]$$
Εάν $x(a) \leq y(a) = c$, τότε $x(t) \leq y(t)$, $a<t\leq\beta$.

Απόδ.: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x(a) < y(a)$

Λόγω συνέχειας της $\sigma(t) = x(t) - y(t)$ στο $y=a$, $\sigma(a)<0$

$\Longrightarrow \exists\, \delta>0$ (μικρό) ώστε $\sigma(t)<0$, $t\in[a,a+\delta] \subseteq [a,\beta]$.

Έστω επίσης πως $\exists\, t_1 \in (a+\delta, \beta]$ ώστε $\sigma(t_1)>0$.

Θέτουμε $A = \{t\in[a,\beta] \mid \sigma(s)<0,\ \forall s\in[a,t]\}$

Το A είναι μη κενό και φραγμένο.
$$t^* = \sup A.$$

$\sigma(t)<0 \quad \forall t\in A$

$\sigma(t^*) = 0$

Όμως: $\sigma'(t) = x'(t) - y'(t) \leq f(t,x(t)) - f(t,y(t))$, $t\in(a,t^*]$

$\leq L\,|x(t)-y(t)| = -L\,\sigma(t)$

Από το Λήμμα του Gronwall $\Rightarrow \sigma(t) \leq \sigma(a)e^{-L(t-a)}$, $t\in[a,t^*]$

Ειδικότερα, για $t=t^*$, $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sigma(t^*)}} \leq \underbrace{\sigma(a)\,e^{-L(t-a)}}_{<0}$

ΑΝΤΙΦΑΣΗ!

(ii) Αν $\underline{x(a)=y(a)}$:

Για $n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} y_n'(t) = f(t, y_n(t)), & a<t\leq \beta \\ y_n(a) = y(a) + \frac{1}{n} \end{cases}$

Τότε μπορώ να εφαρμόσω το προηγούμενο, άρα
$$x(t) \leq y_n(t), \quad \forall t\in[a,\beta], \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$|y(t)-y_n(t)| \leq |y(a)-y_n(a)|\, e^{L(\beta-a)} = \frac{1}{n} e^{L(\beta-a)} \quad \forall t\in[a,\beta]$$

$\Longrightarrow y_n \to y$ ομοιόμορφα στο $[a,\beta]$

$x(t)\leq y_n(t)$ Παίρνοντας τα όρια:
$$x(t) \leq \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t) \quad \forall t\in[a,\beta]$$

<u>Θεώρημα</u> (Σύγκρισης):

Έστω x, y λύσεις των Π.Α.Τ. $x' = f(t, x(t)), \ a<t\leq\beta$
$y' = g(t, y(t)), \ a<t\leq\beta$
όπου $f, g: [a,\beta]\times[m,M]\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχείς ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και επιπρόσθετα
$$f(t,x)\leq g(t,x), \quad t\in[a,\beta],\ x\in[m,M].$$

$x(t)\leq M$
$y(t)\leq M$
$\in[a,\beta]$

Εάν $x(a)\leq y(a)$, τότε $x(t)\leq y(t)$, $t\in[a,\beta]$.

<u>Απ.</u>:
$$x' = f(t,x(t)) \leq g(t,x(t))$$
$$y' = g(t,y(t))$$
$$x(a)\leq y(a)$$
Εφαρμόζω το προηγούμενο Θεώρημα!

Θεώρημα (Συνεχής Εξάρτηση λύσεων από Παραμέτρους):

Έστω $f, g : [a,\beta]\times[m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχείς,
η f είναι Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le L\,|x-y|, \quad t\in[a,\beta],\ x,y\in[m,M]$$

και $$|f(t,x)-g(t,x)| \le \varepsilon, \quad t\in[a,\beta],\ x\in[m,M],\ \varepsilon>0$$

Έστω x, y λύσεις των Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), & t\in(a,\beta] \\ x(a)=c_1 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} y'(t) = g(t,y(t)), & t\in(a,\beta] \\ y(a)=c_2 \end{cases}$$

$$m \le x(t) \le M, \quad m \le y(t) \le M.$$

Τότε ισχύει: $$|x(t)-y(t)| \le |x(a)-y(a)|\,e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)}-1\right), \quad t\in[a,\beta]$$

Απόδ: Θέτουμε $\sigma(t) = (x(t)-y(t))^2$, $t\in[a,\beta]$

Τότε για $a<t\le\beta$, σ παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$\sigma'(t) = 2\,(x(t)-y(t))\,(x'(t)-y'(t)) =$$
$$= 2\,(x(t)-y(t))\,\big(f(t,x(t))-g(t,y(t))\big) =$$
$$= 2\,(x(t)-y(t))\,\big(f(t,x(t))-f(t,y(t))+f(t,y(t))-g(t,y(t))\big)$$

$$= 2\,(x(t)-y(t))\big(f(t,x(t))-f(t,y(t))\big) + 2\,(x(t)-y(t))\big(f(t,y(t))-g(t,y(t))\big)$$

$$\le 2\,|x(t)-y(t)|\,|f(t,x(t))-f(t,y(t))| + 2\,|x(t)-y(t)|\,|f(t,y(t))-g(t,y(t))|$$

$$\le 2\,|x(t)-y(t)|\cdot L\,|x(t)-y(t)| + 2\,\varepsilon\,|x(t)-y(t)|$$

$$= 2L\,\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)}$$

Δηλαδή: $\sigma'(t) \le 2L\,\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)}$, $a<t\le\beta$

$\Longrightarrow \sigma(t) \le$ ("λύση $y(t)$ της Δ.Ε. με $y(a)=\sigma(a)$")

$$y' = \underbrace{2Ly(t) + 2\varepsilon\sqrt{y(t)}}$$

$$F(t,y(t)) = 2Ly(t) + 2\varepsilon\sqrt{y(t)}$$

Το πρόβλημα είναι στο 0 γιατί μου δίνει ότι η F δεν είναι Lipschitz συνεχής (είναι Helder συνεχής με εκθέτη $1/2$)

$\underline{0 < y(t)}$

$$e^{-2Lt}\left(y' - 2Ly(t)\right) = 2\varepsilon e^{-2Lt}\sqrt{y(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2Lt}y(t)\right) = 2\varepsilon e^{-2Lt}\sqrt{y(t)} \qquad z(t) = e^{-2Lt}y(t)$$

$$z'(t) = 2\varepsilon e^{-2Lt}\sqrt{e^{2Lt}z(t)}$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2\varepsilon e^{-2Lt}\cdot e^{Lt}\sqrt{z(t)}$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2\varepsilon e^{-Lt}\sqrt{z(t)} \Rightarrow \frac{z'(t)}{\sqrt{z(t)}} = 2\varepsilon e^{-Lt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(2z^{1/2}(t) + \frac{2\varepsilon}{L}e^{-Lt}\right) = 0$$

$$\cancel{2}z^{1/2}(t) + \frac{\cancel{2}\varepsilon}{L}e^{-Lt} = \cancel{2}z^{1/2}(a) + \frac{\cancel{2}\varepsilon}{L}e^{-La}$$

$$\Rightarrow z^{1/2}(t) = z^{1/2}(a) + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{-La} - e^{-Lt}\right)$$

$$\sqrt{\sigma(t)} \leq \sqrt{\sigma(a)}\,e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

$$e^{-Lt}y^{1/2}(t) = e^{-La}y^{1/2}(a) + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{-La} - e^{-Lt}\right)$$

$$y^{1/2}(t) = y^{1/2}(a)\,e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}e^{Lt}\left(e^{-La} - e^{-Lt}\right)$$

$$= y^{1/2}(a)\,e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

$$\sigma_n(t) = \sigma(t) + \frac{1}{n}$$

$$\sigma_n'(t) = \sigma'(t) \leq 2L\sigma(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(t)} \leq 2L\sigma_n(t) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma_n(t)}$$

(Η σ_n δεν μηδενίζεται) (Είναι Lipschitz)

$$\Longrightarrow \sqrt{\sigma_n(t)} \leq \sqrt{\sigma_n(a)}\, e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sigma(t) + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{\sigma(a) + \frac{1}{n}}\, e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$$

Παίρνω όρια: $\sqrt{\sigma(t)} \leq \sigma(a)\, e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-a)} - 1\right)$

10^{η} Παράδοση

Σ.Δ.Ε. 07/12/2013

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Για παράδειγμα:

$$y^{(\nu)}(t)+g_1(t)y^{(\nu-1)}(t)+\dots+g_{\nu-1}(t)y'(t)+g_\nu(t)y(t)=f(t)$$

Μη ομογενής, γραμμική Δ.Ε. ν τάξης
όπου $f, g_1, g_2, \dots, g_\nu : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς.

Αρχικές Συνθήκες

$$y(t_0)=c_1$$
$$y'(t_0)=c_2$$
$$\vdots$$
$$y^{(\nu-1)}(t_0)=c_\nu$$

Καλούμε:

$$y(t)=y_1(t)$$
$$y_1'(t)=y'(t)=y_2(t)$$
$$y_2'(t)=y''(t)=y_3(t)$$
$$\vdots$$
$$y_{\nu-1}'(t)=y^{(\nu-1)}(t)=y_\nu(t)$$
$$y_\nu'(t)=y^{(\nu)}(t)=f(t)-g_1(t)y_\nu(t)-\dots-g_{\nu-1}(t)y_2(t)-g_\nu(t)y_1(t)$$

$$\underline{y}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\\vdots\\y_\nu(t)\end{bmatrix} \qquad \underline{y}'(t)=\begin{bmatrix}y_2(t)\\y_3(t)\\\vdots\\y_\nu(t)\\f(t)-g_1(t)y_\nu(t)-\dots-g_\nu(t)y_1(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&&0\\0&0&1&0&\dots&0\\\vdots&&&&\ddots&\\0&0&\dots&&0&1\\-g_\nu&-g_{\nu-1}&\dots&&-g_2&-g_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\\vdots\\\vdots\\y_\nu(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\f(t)\end{bmatrix}$$

$$\underline{y}'(t)=A(t)\,\underline{y}(t)+\underline{f}(t)$$

$\underline{y}(t_0) = \underline{c}$ $\qquad\qquad$ $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\nu \end{bmatrix}$

$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1\nu}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\nu 1}(t) & \dots & \dots & a_{\nu\nu}(t) \end{pmatrix}$$

$\underline{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times 1}$

$\underline{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times 1}$

$x' = f(t,x)$, $t>0$

$x(0) = c$

Για $t<0$?

$x(t) = y(s)$ $\qquad$ $s = -t$

$x'(t) = \frac{d}{ds} y(s) \cdot \frac{ds}{dt} = -\dot{y}(s)$

$-\dot{y}(s) = f(-s, y(s))$

$\dot{y}(s) = -f(-s, y(s))$, $s>0$.

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής $\underline{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ συνεχής

Τότε το Π.Α.Τ. $\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$

με $\underline{y}(t_0) = \underline{c}$

έχει ακριβώς μία λύση που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

$$= 2 \langle A(t)\underline{y}(t), \underline{y}(t) \rangle + 2 \langle f(t), \underline{y}(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \sigma'(t) \le 2\|A(t)\underline{y}(t)\| \cdot \|\underline{y}(t)\| + 2\|\underline{f}(t)\| \cdot \|\underline{y}(t)\|$$

$$\le 2\|A(t)\|\,\|\underline{y}(t)\|^2 + 2\,\|\underline{f}(t)\|\,\|\underline{y}(t)\|$$

$$\le 2\|A(t)\|\,\sigma(t) + \|\underline{f}(t)\|^2 + \sigma(t)$$

γιατί $2ab \le a^2 + b^2$

$$\Rightarrow \sigma'(t) \le \left(1 + 2\|A(t)\|\right)\sigma(t) + \|\underline{f}(t)\|^2$$

$\sigma : [t_0, +\infty)$, $f, g : [t_0, +\infty)$

$\sigma'(t) \le g(t)\sigma(t) + f(t)$

~~Λήμμα Gronwall~~

$$e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds}(x' - gx) = f e^{-\int_{t_0}^{t} g}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)} x(t)\right) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} g(s)} d\xi$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)} x(t) - \int_{t_0}^{t} f(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} g(s)ds} d\xi = x(t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} + e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} \int_{t_0}^{t} f(\xi)^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds} d\xi$$

άρα $\sigma(t) \le \sigma(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} + e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} \int_{t_0}^{t} f(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} g(s)ds} d\xi$

Δεν έχω ευρήσει λύση για πεπερασμένο χρόνο!

Φυλλάδιο 2 - Άσκ. 2

a) Η ~~$tq(t)$~~ συνεχής, άρα η $\int_0^t sq(s)ds$ παραγ.

Η t^2 παραγ. Άρα η $q(t)$. παραγ.

Οπότε με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\varphi'(t) = -2t + t\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) - t\varphi(t) = -2t$$

$$\Rightarrow e^{-t^2/2}\varphi'(t) - te^{-t^2/2}\varphi(t) = -2te^{-t^2/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-t^2/2}\varphi(t)\right) = 2\frac{d}{dt}e^{-t^2/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-t^2/2}\varphi(t) - 2e^{-t^2/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-t^2/2}\varphi(t) - 2e^{-t^2/2} = \varphi(0) - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) = (\varphi(0)-2)e^{t^2/2} + 2}$$

Επειδή $\varphi(0)=0 \Rightarrow \varphi(t) = -2e^{t^2/2} + 2, \ t\in\mathbb{R}$

$\varphi(t) = -t^2 + \int_0^t s\varphi(s)\,ds$

$\Rightarrow \varphi(0) = 0 + 0 = 0$

β) Αν φ Riemann ολοκλ.

$$\Downarrow$$

$\int_0^t s\varphi(s)ds$ Lipschitz συνεχής

$\Rightarrow \varphi(t) = -t^2 + \int_0^t s\varphi(s)\,ds$ συνεχής

Άρα οδηγούμαι πάλι στο (α).

Αν f Riemann ολοκληρώσιμη, $[a,\beta]$, $|f| \le M$

τότε η $F(t) = \int_a^t f(s)\,ds$ είναι Lipschitz συνεχής.

$$|F(t) - F(s)| = \left|\int_a^t f(\xi)d\xi - \int_a^s f(\xi)d\xi\right|$$

$$\le \left|\int_s^t f(\xi)d\xi\right| \le \int_s^t |f(\xi)|d\xi$$

$$\le M(t-s)$$

Φυλλάδιο 3

(2) $\sigma'(t) \leq \delta^2 + L\sigma(t)$, $t>0$ Διεύγουμαι

$\sigma'(t) \leq \delta^2 \Rightarrow \sigma'(t) \leq (\delta^2 t)' \Rightarrow (\sigma(t)-\delta^2 t)' \leq 0$

Η $\sigma(t)-\delta^2 t$ φθίνουσα.

Για $t>0$:

$\sigma(t)-\delta^2 t \leq \sigma(0) \Rightarrow \sigma(t) \leq \sigma(0)+\delta^2 t$

$\sigma'(t) - L\sigma(t) \leq \delta^2$

πολ/ούς Euler $e^{-Lt}\sigma'(t) - e^{-Lt}L\sigma(t) \leq e^{-Lt}\delta^2$

$\Rightarrow \left(e^{-Lt}\sigma(t)\right)' \leq \left(-\delta^2 \frac{e^{-Lt}}{L}\right)'$

$\Rightarrow \left(e^{-Lt}\sigma(t) + e^{-Lt}\cdot\frac{\delta^2}{L}\right)' \leq 0$

Η $e^{-Lt}\sigma(t) + e^{-Lt}\frac{\delta^2}{L}$ φθίνουσα

Άρα για $t>0$: $e^{-Lt}\sigma(t) + e^{-Lt}\frac{\delta^2}{L} \leq \sigma(0) + \frac{\delta^2}{L}$

$\Rightarrow \sigma(t) + \frac{\delta^2}{L} \leq \left(\sigma(0)+\frac{\delta^2}{L}\right)e^{Lt}$

$\Rightarrow \sigma(t) \leq \left(\sigma(0)+\frac{\delta^2}{L}\right)e^{Lt} - \frac{\delta^2}{L}$.

Σ.Δ.Ε.

12/11/2013

Θεώρημα: Αν $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής,

$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ συνεχής,

το Π.Α.Τ. $\underline{x}'(t) = A(t)\,x(t) + G(t)$

$\underline{x}(t_0) = \underline{c}$

όπου $\underline{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

έχει ακριβώς μία λύση, που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δομή λύσεων

$$\underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t) \qquad (*)$$

όπου $\underline{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$

$A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

(Αν έβαζα αρχική τιμή, θα είχε ακριβώς μια λύση. Εδώ μας απασχολεί να βρω τις λύσεις γενικά)

$$X = \{\underline{x} \mid \underline{x} \text{ λύση της } (*)\}$$

Ο X είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις + (πρόσθεση συναρτήσεων), $\cdot$ (πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με συνάρτηση).

$\underline{x}, \underline{y}$ λύσεις $(*) \Longrightarrow \underline{x}+\underline{y}$ επίσης λύση $(*)$

$$(\underline{x}+\underline{y})' = \underline{x}' + \underline{y}' = A(t)\,\underline{x}(t) + A(t)\,\underline{y}(t) = A(t)\left(\underline{x}(t)+\underline{y}(t)\right)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \lambda\underline{x}$ είναι λύση

$$(\lambda\underline{x}(t))' = \lambda\,\underline{x}'(t) = \lambda\left(A(t)\,\underline{x}(t)\right) = A(t)\left(\lambda\underline{x}(t)\right).$$

Να βρούμε βάση του χώρου των λύσεων, και τη διάσταση του χώρου των λύσεων.

Αν $n=1$:

$$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad A:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ συνεχής}$$
$$x'(t)=A(t)\,x(t)$$

η $\varphi = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$ είναι λύση

$$\mathcal{B}=\{\varphi\}$$

Αν x (*) λύση, τότε $\exists\, \lambda\in\mathbb{R}$: $x=\lambda\varphi$.

$\varphi(0)=1$. Είναι λύση του Π.Α.Τ. $\begin{bmatrix} x'(t)=A(t)x(t) \\ x(0)=1 \end{bmatrix}$

Αν έχω το Π.Α.Τ. $\begin{bmatrix} x'(t)=A(t)x(t) \\ x(0)=x_0 \end{bmatrix}$, η λύση είναι $x_0\varphi(t)$.

$$x_0\varphi(t)\Big|_{t=0} = x_0\cdot\varphi(0)=x_0\cdot 1 = x_0$$

$$\big(x_0\varphi(t)\big)' = x_0\cdot\varphi'(t)=x_0\cdot A(t)\varphi(t) = A(t)\cdot\big(x_0\varphi(t)\big)$$

Αν πάω στο χώρο $\mathbb{R}^{n\times 1}$;

Τα $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Τα $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, ..., $e_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Έστω $\underline{x}_i$ λύση του Π.Α.Τ

$$\underline{x}_i'(t)=A(t)\,\underline{x}_i(t)$$
$$\underline{x}_i(t_0)=e_i$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο θεώρημα, έχει ακριβώς μια λύση.
Το ίδιο για $i=1,2,\dots,n \Longrightarrow \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ λύσεις.

Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{B}=\{\underline{x}_1,\underline{x}_2,\dots,\underline{x}_n\}$ είναι βάση του X.

Το $\mathcal{B}$, για να είναι βάση, θα πρέπει
(i) Τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ να είναι γρ. ανεξάρτητα.
(ii) Να παράγουν το τυχαίο στοιχείο του X.

Θεώρημα: Οι συναρτήσεις

$$\underline{x}_i' = A(t)\,\underline{x}_i(t)$$
$$\underline{x}_i(t_0) = e_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων της $\underline{x}' = A(t)\,\underline{x}(t)$ όταν $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής.

$$\left(\text{Αν } \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \underline{x}_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0. \right)$$

Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$.

$$\lambda_1\underline{x}_1(t)+\dots+\lambda_n\underline{x}_n(t)=\underline{0}$$

Για $t=t_0$:

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_n e_n=\underline{0}$$
$$\xRightarrow{e_1,\dots,e_n \text{ γρ. ανεξ.}} \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0.$$

Άρα οι $x_1,\dots,x_n$ γραμμ. ανεξ.

Έστω τώρα $\underline{x}$ τυχαία λύση της $\underline{x}'=A(t)\underline{x}$.

$$\Longrightarrow \underline{x}(t_0)=\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix} = c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n$$

Θα αποδείξουμε ότι $\underline{x}(t)=c_1\underline{x}_1(t)+\dots+c_n\underline{x}_n(t)$.

Η $c_1x_1(t)+\dots+c_nx_n(t)$ λύνει το Π.Α.Τ. $\quad \underline{x}'(t)=A(t)\,\underline{x}(t)$, $\ \underline{x}(t_0)=\underline{c}$,

το οποίο έχει ακριβώς μία λύση! Άρα $\underline{x}(t)=c_1\underline{x}_1(t)+\dots+c_n\underline{x}_n(t)$.

Για $n=1$: Λύση του $x' = A(t)x$
$x(0)=c$

$$\longrightarrow x(t) = c\, e^{\int_0^t A(s)ds}$$

Το αντίστοιχο για n?

$$e^{\int_0^t A(s)\,ds}$$

$A(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\int_0^t A(s)\,ds = \int_0^t \begin{bmatrix} a_{11}(s) & \cdots & a_{1n}(s) \\ - & - & - \\ - & - & a_{nn}(s) \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \int_0^t a_{11}(s)ds & \cdots & \int_0^t a_{1n}(s)ds \\ - & - & - \\ - & - & \int_0^t a_{nn}(s)ds \end{bmatrix}$$

$$e^B$$

Αν $\beta \in \mathbb{R}$, $e^\beta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta^k}{k!} = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\beta^k}{k!}\right)$

Αν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $e^B := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}$ $\quad (B^0 = I_n)$

$$\overset{?}{=} \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!}$$

υπάρχει το όριο?

$$\left|\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{|B|^k}{k!}$$

Η ουρά είναι πολύ μικρή.

Το $e^{\int_0^t A(s)ds}$ δεν έχει πρόβλημα να ορίζεται.

$$\underline{y}(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}\,\underline{c}$$

$$\underline{y}(0) = e^{0}\,\underline{c} = I_n \cdot \underline{c} = \underline{c}$$

μόνο ο πρώτος όρος $\frac{B^0}{0!} = I_n$

Λύνει τη Δ.Ε???

$$e^{\int_0^t A(s)ds} \cdot \underline{c} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t A(s)ds\right)^k \underline{c}$$

$$= \underline{c} + \frac{1}{1!} \int_0^t A(s)ds \cdot \underline{c} + \frac{1}{2!} \left(\int_0^t A(s)ds\right)^2 \underline{c} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(\int_0^t A(s)ds\right)^k \underline{c} + \dots$$

Είναι παραγωγίσιμοι οι όροι?

$\underline{c}$ ✓

$\int_0^t A(s)\,ds$ ✓

Είναι η $\left(\int_0^t A(s)ds\right)^2$ παραγωγίσιμη συνάρτηση? ΝΑΙ

με παράγωγο $\frac{d}{dt}\left(\left(\int_0^t A(s)ds\right)\left(\int_0^t A(s)ds\right)\right) =$

$$= A(t) \cdot \int_0^t A(s)\,ds + \int_0^t A(s)\,ds \cdot A(t)$$

▶ Αν $A(t) \cdot \int_0^t A(s)\,ds = \int_0^t A(s)\,ds \cdot A(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (αντιμετάθεση)

Τότε η $\underline{y}(t)$ λύση.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_0^t A(s)ds\right)^k = k\left(\int_0^t A(s)ds\right)^{k-1} A(t)$$

Αυτό δεν είναι σωστό εν γένει, αλλά αν ισχύει η αντιμετάθεση του πίνακα με το ολοκλήρωμά του αυτό ισχύει.

Τότε $\frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t A(s)ds}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\int_0^t A(s)ds\right)^k}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \cdot \left(\int_0^t A(s)ds\right)^{k-1} A(t)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\int_0^t A(s)ds\right)^{k-1}}{(k-1)!} A(t) = \underline{e^{\int_0^t A(s)ds} \cdot A(t)}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{y}(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}\,\underline{c} \quad \text{είναι παρ/μη}$$

$$\text{και} \quad \underline{y}'(t) = e^{\int_0^t A(s)ds} \cdot A(t)\,\underline{c} = A(t)\, e^{\int_0^t A(s)ds}\,\underline{c} = A(t)\,\underline{y}(t)$$

Άσκηση:

Αν $A(t)\cdot A(s) = A(s)\cdot A(t)$ $\quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad A(t)\int_0^t A(\xi)\,d\xi = \int_0^t A(\xi)\,d\xi \cdot A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int_0^t f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})}$$

Π.χ. αν $A(t) = A$ (σταθερός) $\quad \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{c} \qquad \begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} \\ \underline{x}(0) &= \underline{c} \end{aligned}$$

Σ.Δ.Ε.

14/11/2013

$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t)$

$\underline{y}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$

$A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

Διάσταση χώρου λύσεων $= n$ $\qquad \dim X = n.$

$\underline{y}_i'(t) = A(t)\,\underline{y}_i(t)$
$\underline{y}_i(t_0) = e_i$

Για τις διάφορες τιμές του i

$X = < \underline{y}_1(t), \dots, \underline{y}_n(t) >$ $\qquad$ οποιαδήποτε άλλη λύση γράφεται σαν γρ. συνδυασμός των $\underline{y}_i(t)$.

Λύση εξίσωσης?

$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t)$
$\underline{y}(t_0) = \underline{c}$

Λύση η: $\underline{y}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds} \cdot \underline{c}$

Για να υπάρχει λύση ισχύει:

(i) Αντιμετάθεση $\quad A(t)\cdot \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds \cdot A(t)$

(ii) $A(t)\cdot A(s) = A(s)\cdot A(t) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

$\left(e^{A+B} = e^{A}\cdot e^{B} \text{ μόνο αν } A\cdot B = B\cdot A \right)$

$X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$X(t) := \begin{bmatrix} \underline{y}_1 & \dots & \underline{y}_n \end{bmatrix}$

<u>Ιδιότητες:</u>

(1) X παραγωγίσιμη:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} \underline{y}_1'(t) & \dots & \underline{y}_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\underline{y}_1(t) & \dots & A\underline{y}_n(t) \end{bmatrix}$$

(2) Λύση στο Π.Α.Τ. $\begin{bmatrix} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = I_n \end{bmatrix}$

Αν $X' = AX$ — X θεμ. λύση

$X(t_0) = I_n$ — $X(t_0, t)$

$X, A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, A συνεχής: λύνεται όπως πριν

$f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Πότε είναι γραμ. ανεξάρτητες? Οποτεδήποτε έχουμε

$$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$

$\lambda_1 f_1(t_1) + \dots + \lambda_n f_n(t_1) = 0$

$\vdots$

$\lambda_1 f_1(t_n) + \dots + \lambda_n f_n(t_n) = 0$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη

$\Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

ο πίνακας: $\begin{bmatrix} f_1(t_1) & \dots & f_n(t_1) \\ \vdots & & \\ f_1(t_n) & \dots & f_n(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{0}$

αντιστρέψιμος

$$\lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t) = 0$$

<u>Wronski:</u>

$$\lambda_1 f_1'(t) + \ldots + \lambda_n f_n'(t) = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 f_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \lambda_n f_n^{(n-1)}(t) = 0$$

$$W(f_1, \ldots, f_n)(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ορίζουσα.

$$W(f_1, \ldots, f_n)(t) := \det \begin{bmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

$X(t_0; t_0) = I_n$ αντιστρέψιμος
$X(t_0; t)$ αντιστρέψιμος πίνακας.

Υπολογισμός της $W(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n)(t)$

$$W(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n)(t) = \det X(t) = \det \left[\underline{y}_1(t) \;\; \underline{y}_2(t) \;\; \ldots \;\; \underline{y}_n(t) \right]$$

$$W(t) = \det \left[\underline{y}_1(t) \;\; \ldots \;\; \underline{y}_n(t) \right]$$

$$W'(t) = \det \left[\underline{y}_1'(t) \;\; \underline{y}_2(t) \;\; \ldots \;\; \underline{y}_n(t) \right] + \det \left[\underline{y}_1(t) \;\; \underline{y}_2'(t) \;\; \ldots \;\; \underline{y}_n(t) \right] + \ldots + \det \left[\underline{y}_1(t) \;\; \ldots \;\; \underline{y}_n'(t) \right]$$

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t)\, W(t)$$

Αν $A = (a_{ij})$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

λ_i ιδιοτιμές του A

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Φυλλάδιο 3

(3) ~~[illegible]~~

Λύση της ολοκληρωτικής:

Για $0 \le t \le 1$: $\varphi(t) = \int_0^t (1-\varphi(s))\,ds$ παρ/μη

$\Rightarrow \varphi'(t) = 1-\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) + \varphi(t) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^t \varphi'(t) + e^t \varphi(t) - e^t = 0 \Rightarrow \left(e^t \varphi(t) - e^t\right)' = 0$

$\Rightarrow e^t \varphi(t) - e^t = 1 \cdot 0 - 1 = -1$

$\Rightarrow \varphi(t) = 1 - e^{-t}$, $0 \le t \le 1$.

Για $t > 1$:

$$\varphi(t) = \int_0^1 (1 - g(s)\varphi(s))\,ds + \int_1^t (1 - g(s)\varphi(s))\,ds$$

$$= \int_0^1 (1-\varphi(s))\,ds + \int_1^t (1+\varphi(s))\,ds$$

$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi(1) + \int_1^t (1+\varphi(s))\,ds$

$\Rightarrow \varphi'(t) - \varphi(t) - 1 = 0$

$\Rightarrow \left(e^{-t}\varphi(t) + e^{-t}\right)' = 0 \Rightarrow e^{-t}\varphi(t) + e^{-t} = e^{-1}\varphi(1) + e^{-1}$

$\Rightarrow e^{-t}\varphi(t) + e^{-t} = 2e^{-1} - e^{-2} \Rightarrow \varphi(t) = (2e^{-1} - e^{-2})e^t - 1$, $t>1$

Είναι συνεχής στο 1;

$\lim_{t \to 1^+} \left(e^t (2e^{-1} e^{-2}) - 1\right) = e(2e^{-1} - e^{-2}) - 1 = 1 - e^{-1} = \lim_{t \to 1^-} \varphi(t)$

ΣΥΝΕΧΗΣ!

Λύση του Π.Α.Τ.:

Τα ίδια με πριν: Έστω ότι έχει λύση.

Για $0\le t\le 1$:
$$y'(t) = 1 - g(t)\,y(t), \quad 0\le t\le 1$$
$$y(0)=0$$

$$\Longrightarrow y(t) = 1 - e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1$$

Για $t>1$:
$$y'(t) = 1 + y(t)$$
$$y(1) = 1 - e^{-1}$$

$$\Longrightarrow y(t) = (2e^{-1} - e^{-2})\,e^{t} - 1, \quad t>1.$$

Είναι παρ/μη?

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{y(t)-y(1)}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} \frac{2e^{t-1} - e^{t-2} - 1 - 1 + e^{-1}}{t-1} \stackrel{0/0}{=}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \frac{2e^{t-1} - e^{t-2}}{1} = 2 - e^{-1}$$

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{y(t)-y(1)}{t-1} = e^{-1}$$

Διαφορετικά, άρα η y ΟΧΙ ΠΑΡ/ΜΗ!

(1) a) $f(t,y) = t\sqrt{y} + t^2$

$t\in[0,1], \quad y\in[0,4]$

$|f(t,y)| \le 3.$

Θ. Peano: $f: [a,\beta]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής και
$\exists M$ τ.ω. $|f(t,y)|\le M$,
Τότε το Π.Α.Τ. $y'(t)=f(t,y)$
$y(a)=\xi$
έχει λύση στο διάστημα $[a,\beta^*]$ με $\beta^*=\min\left\{\beta, \frac{d-\xi}{M}, \frac{\xi-c}{M}\right\}$

$\beta^*=\min\left\{1, \frac{4-1}{3}, \frac{1-0}{3}\right\} = \frac{1}{3}$

Άρα το Θ. Peano μας βρίσκει λύση στο $[0,\frac{1}{3}]$.

β). Στο διάστημα ύπαρξης λύσης, η λύση μας θα είναι αύξουσα, και μάλιστα γνήσια αύξουσα.

$y'(t) = t\sqrt{y(t)} + t^2 \geq 0$

Η ελάχιστη τιμή της λύσης είναι 1 (Αφού $y(0)=1$ και η y αύξουσα).

γ) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι (τοπικά) Lipschitz συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή με $t\in[0,+\infty)$, $y\in[1,+\infty)$

$|f(t,x)-f(t,y)|\le L\,|x-y|$, $t\in[a,b]\subseteq[0,+\infty)$
$x,y\in[c,d]\subseteq[1,+\infty)$

$|f(t,x)-f(t,y)| = |t\sqrt{x}+\cancel{t^2}-t\sqrt{y}-\cancel{t^2}| = |t(\sqrt{x}-\sqrt{y})| =$

$= t\,|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = t\,\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le b\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,|x-y| \le$

$\le b\cdot\frac{1}{1+1}\,|x-y| = \frac{b}{2}\,|x-y|$

Σ.Δ.Ε. 19/11/2013

Ορίζουσα Wronski

$$W(f_1,\dots,f_n)=\det\begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & & \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

$A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής

$X'=A(t)X(t)$

$X(t_0)=I_n$

$X(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$X(t)=\left[\underline{y}_1(t)\ \ \underline{y}_2(t)\ \dots\ \underline{y}_n(t)\right]$

$$\left.\begin{aligned}\underline{y}_i'(t)&=A(t)\underline{y}_i(t)\\ \underline{y}_i(t_0)&=e_i\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,\dots,n$$

$w(t)=\det X(t)\Longrightarrow w'(t)=\det\left[\underline{y}_1'\ \underline{y}_2\ \dots\ \underline{y}_n\right]+\det\left[\underline{y}_1\ \underline{y}_2'\ \dots\ \underline{y}_n\right]+\dots$

$+\dots+\det\left[\underline{y}_1\ \underline{y}_2\ \dots\ \underline{y}_n'\right]=$

$=\det\left[A(t)\underline{y}_1\ \ \underline{y}_2\ \dots\ \underline{y}_n\right]+\det\left[\underline{y}_1\ \ A(t)\underline{y}_2\ \dots\ \underline{y}_n\right]+\dots+\det\left[\underline{y}_1\ \underline{y}_2\ \dots\ A\underline{y}_n\right]$

$A\underline{y}_1=\sum_{i=1}^{n}c_{1i}(t)\,\underline{y}_i(t)$ Θέλω να γράψω το $A\underline{y}_1$ σαν γρ. συνδ. των στοιχείων της βάσης $(\underline{y}_1,\underline{y}_2,\dots,\underline{y}_n)$

Τότε $\det\left[A\underline{y}_1\ \ \underline{y}_2\ \dots\ \underline{y}_n\right]=\det\left[\sum_{i=1}^{n}c_{1i}\underline{y}_i(t)\ \ \underline{y}_2\ \ \underline{y}_3\ \dots\ \underline{y}_n\right]=$

από γραμμικότητα ορίζουσας

$=\sum_{i=1}^{n}\det\left[c_{1i}\underline{y}_i\ \ \underline{y}_2\ \ \underline{y}_3\ \dots\ \underline{y}_n\right]=\det\left[c_{11}\underline{y}_1\ \ \underline{y}_2\ \dots\ \underline{y}_n\right]=c_{11}\cdot\det\left[\underline{y}_1\dots\underline{y}_n\right]$

Οπότε αν αντίστοιχα $\underline{Ay_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \underline{y_j}$, $i=1,2,\dots,n$, τότε

$$\det\left[\underline{y_1} \dots \underline{y_{i-1}}\ \underline{Ay_i} \dots \underline{y_n}\right] = \det\left[\underline{y_1} \dots \underline{y_{i-1}}\ c_{ii}\underline{y_i} \dots \underline{y_n}\right] =$$

$$= c_{ii} \cdot \det\left[\underline{y_1} \dots \underline{y_n}\right]$$

Άρα $w'(t) = \left(c_{11}(t) + c_{22}(t) + \dots + c_{nn}(t)\right) \cdot w(t)$

Όταν $\underline{Ay_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \underline{y_j}$, τότε $\quad X = \left[\underline{y_1}\ \underline{y_2} \dots \underline{y_n}\right]$

$$AX = X \cdot C \qquad \text{όπου} \qquad C = (c_{ij})$$

$$\Longrightarrow \boxed{X^{-1}(t)\, A(t)\, X(t) = C(t)}$$

(μπορώ να πολ/ω με X^{-1} γιατί οι στήλες του X είναι βάση, άρα γρ. ανεξάρτητες, άρα ο X αντιστρέψιμος)

$$c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = tr(C) = tr\left(X^{-1}(t) \cdot A(t) \cdot X(t)\right)$$

trace

Ιδιότητες: $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$B = (\beta_{ij})$

$trB = \beta_{11} + \beta_{22} + \dots + \beta_{nn}$

Αν $B, \Gamma \in \mathbb{R}^{n\times n} \Longrightarrow tr(B\Gamma) = tr(\Gamma B)$ (ενώ $B\Gamma \neq \Gamma B$)

Απ: $B = (\beta_{ij})$, $\Gamma = (\gamma_{ij})$

$B\Gamma = (k_{ij}) \qquad k_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\gamma_{kj}$

$$\Longrightarrow tr(B\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} k_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\gamma_{ki}$$

$\Gamma B = (l_{ij}) \qquad l_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\beta_{kj}$

$$\Longrightarrow tr(\Gamma B) = \sum_{i=1}^{n} l_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\beta_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\beta_{ki} = tr(B\Gamma)$$

$$c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = tr\left(\underbrace{X^{-1}(t)}\ \underbrace{A(t)\,X(t)}\right) = tr\left(A(t)X(t)\cdot X^{-1}(t)\right) =$$

$$= tr\left(A(t)\cdot I_n\right) = tr\left(A(t)\right) \implies tr(C) = tr(A)$$

$$w'(t) = tr\left(A(t)\right)\cdot w(t)$$

$$w(t_0) = 1.$$

$$\implies w(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}$$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

$$y_1(t) = y(t)$$

$$y_2(t) = y'(t)$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \implies \underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ -a_{n-1}(t)y_n(t) - a_{n-2}(t)y_{n-1}(t) - \dots - a_0(t)y_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\left(y_n'(t) = y^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t)\,y_n(t) - a_{n-2}(t)\,y_{n-1}(t) - \dots - a_1(t)y_2(t) - a_0(t)y_1(t) \right)$$

$$\underline{y}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\parallel \atop A(t)} \underline{y}(t)$$

$$\underline{y}_i' = A(t)\,\underline{y}_i$$

$$\underline{y}_i(t_0) = e_i$$

$$X(t) = \left[\underline{y}_1(t)\ \ \underline{y}_2(t)\ \dots\ \underline{y}_n(t)\right]$$

$X^{-1}(t)$ Ποια Δ.Ε. λύνει;

Κατ' αρχήν, είναι ο $X^{-1}(t)$ παραγωγίσιμος πίνακας;

Σίγουρα υπάρχει, γιατί $\det X > 0$.

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\det X(t)} \cdot \left((-1)^{i+j} X_{ij} \right)^{t}$$

(όπου X_{ij} = ο $n-1$ πίνακας που είναι ο X διαγράφοντας την i-γραμμή και τη j-στήλη και παίρνω την ορίζουσα.)

Ο X^{-1}, όταν ορίζεται, είναι παραγωγίσιμος, γιατί είναι πηλίκο παραγωγίσιμων.

Ποια Δ.Ε. λύνει;

$$X(t) \cdot X^{-1}(t) = I_n \Longrightarrow X'(t) \cdot X^{-1}(t) + X(t) \cdot \frac{d}{dt} X^{-1}(t) = 0$$

ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας

$$\Rightarrow X(t) \cdot \frac{d}{dt} X^{-1}(t) + X'(t) X^{-1}(t) = 0$$

$$\Rightarrow X^{-1}(t) X(t) \frac{d}{dt} X^{-1}(t) + X^{-1}(t) X'(t) X^{-1}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} X^{-1}(t) = - X^{-1}(t) X'(t) X^{-1}(t) = - X^{-1}(t) \cdot \left(A(t) \cdot X(t) \right) X^{-1}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt} X^{-1}(t) = - X^{-1}(t) \cdot A(t) \\ X^{-1}(t_0) = I_n \end{array}}$$

Αυτή τη Δ.Ε. λύνει ο $X^{-1}(t)$.

(* Εμφανίζεται το − και αλλάζει η σειρά του πολ/μού)

Στόχος: Λύση μη ομογενούς:

$$\underline{y}'(t) = A(t) \underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$
$$\underline{y}(t_0) = \underline{c}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\underline{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$
$$X(t_0) = C \qquad , B, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad C \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\underline{y}_i' = A(t)\,\underline{y}_i + \underline{b}_i(t)$$

$$\underline{y}_i(t_0) = \underline{c}_i$$

$$X(t) = [\underline{y}_1(t) \ \dots \ \underline{y}_n(t)]$$

$$X'(t) = [\underline{y}_1' \ \dots \ \underline{y}_n'] = [A(t)\underline{y}_1 + \underline{b}_1 \ \dots \ A(t)\underline{y}_n + \underline{b}_n]$$
$$= [A(t)\underline{y}_1 \ \dots \ A(t)\underline{y}_n] + [\underline{b}_1 \ \dots \ \underline{b}_n]$$
$$= A(t)\cdot X(t) + B(t).$$

$$\underline{y}'(t) - A(t)\,\underline{y}(t) = \underline{b}(t)$$

$$\underbrace{Y(t)\,\underline{y}'(t) - Y(t)A(t)\,\underline{y}(t)} = Y(t)\,\underline{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t)\,\underline{y}(t)\right) = Y(t)\,\underline{y}'(t) + Y'(t)\cdot\underline{y}(t)$$

Θέλω $Y'(t) = -Y(t)A(t)$

Ποια είναι η λύση αυτής της Δ.Ε.?

$X^{-1}(t)$!!!

όπου $X(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας της A.

$$X'(t) = A(t)X(t)$$
$$X(t_0) = I_n.$$

Οπότε θα πολλαπλασιάσω με τον $X^{-1}(t)$.

$$\underline{y}'(t) - A(t)\,\underline{y}(t) = \underline{b}(t)$$

$$\iff X^{-1}(t)\,\underline{y}'(t) - X^{-1}(t)\,A(t)\,\underline{y}(t) = X^{-1}(t)\,\underline{b}(t)$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(X^{-1}(t)\,\underline{y}(t)\right) = X^{-1}(t)\,\underline{b}(t)$$

$$X^{-1}(t)\,\underline{y}(t) - X^{-1}(t_0)\,\underline{y}(t_0) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\underline{b}(s)\,ds.$$

$$\Rightarrow X^{-1}(t)\,\underline{y}(t) = X^{-1}(t_0)\,\underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\iff \boxed{\underline{y}(t) = X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\underline{y}(t_0) + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\underline{b}(s)\,ds.}$$

Η λύση της μη ομογενούς.

Αν θέλω να λύσω το πρόβλημα

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$$
$$Y(t_0) = C,$$

θα έχω.

$$Y(t) = X(t)\,X^{-1}(t_0)\cdot C + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,B(s)\,ds.$$

Σ.Δ.Ε. 21/11/2013

$t>1$: $\varphi(t) = \int_0^t [1 - g(s)\varphi(s)]ds = \int_0^1 [1-\varphi(s)]ds + \int_1^t [1+\varphi(s)]ds$

$\Longrightarrow \varphi$ παραγ. $\varphi'(t) = 1 + \varphi(t)$, $t>1$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dots, & t \leq 1 \\ \dots, & t>1 \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ σταθερός πίνακας

$X' = AX$

$X(t_0) = I_n$ ή $X(t_0) = C$

$\Longrightarrow X(t) = e^{A(t-t_0)} C$

λύση του Π.Α.Τ.

$X, A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

$X' = A(t) X$

$X(t_0) = I_n$ ή $X(t_0) = C$

$\Downarrow$

$X(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \cdot C$ είναι η λύση

όταν $A(t) \int_{t_0}^t A(s)ds = \int_{t_0}^t A(s)ds \cdot A(t)$ $\forall t$

$A(t) \cdot A(s) = A(s) A(t)$.

Παράδειγμα 1:

Να λυθεί $x' = -2x + 6y$

$y' = x - 2y$

Ιδιοτιμή λ $\qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0 \Longrightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^{n \times 1},\ u \neq 0 \ : \ (\lambda I_n - A)u = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{Au = \lambda u}$$

$$A^2 u = A \cdot Au = A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda \lambda u = \lambda^2 u$$

$A^n u = \lambda^n u$ (με επαγωγή) $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\varphi(A)u = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n\right) u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda^n u =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n\right) u = \varphi(\lambda) u.$$

Όταν A σταθερός είναι: $\qquad e^{A(t-t_0)} u$

u ιδιοδιάνυσμα του A: $\quad Au = \lambda u$

$$e^{A(t-t_0)} u = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}\right) u =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \lambda^n u = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t-t_0))^n}{n!}\right) u =$$

$$= e^{\lambda(t-t_0)} u.$$

Άρα

$$\begin{aligned} x' &= -x + 6y \\ y' &= x - 2y \end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Αρχικά βρίσκουμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A.

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$\Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -6 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+4) = 0$

Ιδιοτιμές: α) $\lambda = 1$ β) $\lambda = -4$.

Αν $\underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή 1:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a + 6\beta = a \\ a - 2\beta = \beta \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 3\beta \\ a = 3\beta \end{array} \right|$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα είναι

$\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Στην ιδιοτιμή 1, έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{u}_1$

Αν $\underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή -4:

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a + 6\beta = -4a \\ a - 2\beta = -4\beta \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 6\beta = -3a \\ a = -2\beta \end{array} \right) \Leftrightarrow a = -2\beta$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Στην ιδιοτιμή -4, έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{u}_2$

$A\underline{u}_1 = \underline{u}_1$ $\qquad\qquad$ $A\underline{u}_2 = -4\underline{u}_2$.

$e^{At}\underline{u}_1 = e^{t}\underline{u}_1$, λύση της ΔΕ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \text{ γιατί } \quad (e^{t}\underline{u}_1)' = e^{t}\underline{u}_1 = e^{t}A\underline{u}_1.$$

Άρα: $e^{t}\underline{u}_1$ μια λύση
$\qquad e^{-4t}\underline{u}_2$ — " —

Για να είναι βάση, θα πρέπει να έχω γρ. ανεξαρτησία.
Αφού τα $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ γρ. ανεξ., το έχω.

Άρα: Βάση του χώρου των λύσεων:

$$\mathcal{B} = \left\{ e^{t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{-4t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Γενική λύση: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$x(t) = 3c_1e^{t} - 2c_2e^{-4t}$$
$$y(t) = c_1e^{t} + c_2e^{-4t}.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Να λυθεί: $\quad x' = 2x + 3y$
$\qquad\qquad\quad y' = -3x + 2y$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ψάχνω ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα του $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Οι ιδιοτιμές ικανοποιούν $\det(\lambda I_2 - A)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 3 & \lambda-2 \end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2+9=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2-(3i)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-2-3i)(\lambda-2+3i)=0$

Ιδιοτιμές: $2-3i \longrightarrow$ ιδιοδιανύσματα
$2+3i$

Εδώ δε χρειάζεται ~~να κάνουμε τη δουλειά 2~~ φορές, αν βρω το u ιδιοδιάνυσμα της $2-3i$, το $\bar{u}$ θα είναι της $2+3i$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} = (2-3i)\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 2a+3\beta=(2-3i)a \\ -3a+2\beta=(2-3i)\beta \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\beta=-3ai \\ \beta=-ai \end{matrix} \right|$$

$$\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -ai \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Στην άλλη τιμή ιδιοδιάνυσμα θα είναι το $\begin{bmatrix} 1 \\ +i \end{bmatrix}$

Λύση: $e^{2t}\underline{u} = e^{(2-3i)t}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = e^{2t-3it}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} =$

$$= e^{2t}\left(\cos(3t)-i\sin(3t)\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos(3t)-i\sin(3t) \\ -\sin(3t)-i\cos(3t) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} \cos(3t) \\ -\sin(3t) \end{bmatrix} - i\,e^{2t}\begin{bmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{bmatrix}$$

Αν πάρω μόνο το πραγματικό, ή μόνο το φανταστικό, μέρος της λύσης, συνεχίζει να είναι λύση.

$\Longrightarrow \; e^{2t}\begin{bmatrix}\cos(3t)\\ -\sin(3t)\end{bmatrix}, \quad e^{2t}\begin{bmatrix}\sin(3t)\\ \cos(3t)\end{bmatrix}$ είναι δύο γρ. ανεξάρτητες λύσεις.

Γενική λύση: $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ -\sin(3t)\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}\sin(3t)\\ \cos(3t)\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{2t}\cos(3t) + c_2 e^{2t}\sin(3t), \\ y(t) = -c_1 e^{2t}\sin(3t) + c_2 e^{2t}\cos(3t) \end{array}}$$

— Φυλλάδιο 4 —

1) $y'(t) \geq 0$ άρα η y αύξουσα $\rightarrow y(t) \geq 1$

Θα δείξω ότι η f τοπικά Lipschitz, με $t \in [0, T]$, $y \in [1, A]$

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left|\sqrt{|x|} + \cancel{t^2} + e^t x^2 - \sqrt{|y|} - \cancel{t^2} - e^t y^2\right| \leq$$

$$\leq \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| + e^t\left|x^2 - y^2\right| = \frac{\left||x| - |y|\right|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} + e^t |x+y|\,|x-y|$$

$$\leq |x-y|\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}}_{\leq 1/2} + \underbrace{e^t}_{\leq e^T}\underbrace{|x+y|}_{\leq 2A}\right) \leq |x-y|\left(2Ae^T + \frac{1}{2}\right)$$

3) $\overline{\lim_{t \to T^-}} |y(t)| = +\infty$

$\forall M > 0 \;\; \exists\, t < T : \;\; |y(t)| > M$

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $t_n \rightarrow T$ και $|y(t_n)| \rightarrow +\infty$.

Έστω πως η λύση y ορίζεται για όλα τα $t>0$.

Από την $y'(t)=t^2+y^2(t)$, $t>0$

$\Longrightarrow y'(t)\geq 0$

- Για $t>0$: $y'(t)\geq t^2>0$ άρα η y γνησίως αύξουσα.

$y \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

Άρα $y(t)>0$, $t>0$.

$$y'(t)\geq t^2,\quad t>0 \Longrightarrow \left(y(t)-\frac{t^3}{3}\right)'\geq 0$$

$$\Longrightarrow y(t)-\frac{t^3}{3}\geq y(0)-0=0 \Longrightarrow y(t)\geq\frac{t^3}{3},\quad t>0.$$

Ο "σημαντικός" όρος, που θα προκαλέσει την έκρηξη λύσης, είναι ο y^2.

$$y'(t)-y^2(t)=t^2\geq 0$$

$$\xrightarrow[y^2(t)>0]{\text{διαιρώ με}} \frac{y'(t)}{y^2(t)}-1\geq 0$$

$$\Longrightarrow \left(-\frac{1}{y(t)}-t\right)'\geq 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{y(t)}+t\right)'\leq 0$$

Για $t\geq t_0>0$: $\frac{1}{y(t)}+t\leq\frac{1}{y(t_0)}+t_0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y(t)}\leq\frac{1}{y(t_0)}+t_0-t,\quad t>t_0$$

Αν πάρω $t=\frac{1}{y(t_0)}+t_0=\overset{>t_0}{T}$, τότε $\frac{1}{y(T)}\leq 0$ Άτοπο.

Σ.Δ.Ε. 26/01/2013

Παράδειγμα 3

$$\begin{aligned} x' &= 2x - z \\ y' &= 2y - z \\ z' &= z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Στο Παρ. 1: $\underline{y}' = A\underline{y}$

$\lambda_1 \longrightarrow V_{\lambda_1}$ ιδιόχ. $\dim V_{\lambda_1} = m_1$

$\vdots$

$\lambda_k \rightarrow V_{\lambda_k}$ ιδιόχ. $\dim V_{\lambda_k} = m_k$

Χαρακτηριστικό πολ/μο:

$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$

$m_i \leq r_i \quad , i = 1, 2, \dots, k$

Στο Παρ. 1, λοιπόν, είχα

$m_i = r_i \quad \forall i = 1, \dots, k$

$\Longrightarrow V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow A$ διαγωνοποιήσιμος

Άρα $\exists$ P αντιστρέψιμος:

$A = P^{-1} D P$, με D διαγών.

$$D = \begin{bmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{m_1} & & & 0 \\ & \underbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}_{m_k} \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι:

$\underline{y}(t) = e^{At} \underline{c}$

$\underline{y}(0) = \underline{c}$

$A^2 = (P^{-1}DP)(P^{-1}DP) = P^{-1}D^2P$

$\vdots$

$A^k = P^{-1}D^kP$

Άρα:

$$e^{At} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{A^\ell t^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{P^{-1}D^\ell P t^\ell}{\ell!} = P^{-1}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{D^\ell t^\ell}{\ell!}\right)P = P^{-1} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^\ell t^\ell}{\ell!} & & \\ & \frac{\lambda_1^\ell t^\ell}{\ell!} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{e^{\lambda_1 t} \cdots e^{\lambda_1 t}}_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix} P$$

Εδώ, θα έχω πίνακα μη διαγωνοποιήσιμο.
Κάνω <u>Κανονικοποίηση Jordan</u>.
"Υποκατάστατο" της διαγωνοποίησης, προκειμένου να βρίσκω δυνάμεις.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(\lambda I_3 - A) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$

Έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda=1$
$\lambda=2$

Θα βρω τους ιδιόχωρους.

$\underline{u}$ ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή $\lambda=1$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x - z = x \\ 2y - z = y \\ z = z \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z = z \end{array}\right.$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\dim V_1 = 1$

$\underline{u}$ ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή $\lambda=2$.

$$\ldots \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x - z = 2x \\ 2y - z = 2y \\ z = 2z \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| z = 0 \right.$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\dim V_2 = 2$

(Δεν βγήκε το παράδειγμα όπως θέλαμε, ο A <u>είναι</u> διαγωνιοποιήσιμος)

A διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}P$$

$$\Leftrightarrow PA=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}P \qquad P=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a_{11} & 2a_{12} & -a_{11}-a_{12}+a_{13}\\ 2a_{21} & 2a_{22} & -a_{21}-a_{22}+a_{23}\\ 2a_{31} & 2a_{32} & -a_{31}-a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}-a_{11}-a_{12}+a_{13}=2a_{13}\\ -a_{21}-a_{22}+a_{23}=2a_{23}\\ -a_{31}-a_{32}+a_{33}=a_{33}\\ 2a_{31}=a_{31}\\ 2a_{32}=a_{32}\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}a_{31}=0\\ a_{32}=0\\ a_{13}=-a_{11}-a_{12}\\ a_{23}=-a_{21}-a_{22}\end{array}\right|$$

$$P=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & -a_{11}-a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & -a_{21}-a_{22}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$$

P αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det P=a_{33}\cdot\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=$

$=a_{33}\left(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right)\neq 0$

(θα προσπαθήσω να εμφανίσω τα ιδιοδιανύσματα).

Ας πάρω $a_{33}=1$.

$a_{11}=1$, $a_{21}=0$

$a_{22}=1$, $a_{12}=0$

Τότε $a_{13}=-1$, $a_{23}=-1$.

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Καλύτερα θα πάρω $a_{33}=-1$.

Τελικά,
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα
$$e^{At} = e^{P^{-1}DPt} = P^{-1} e^{Dt} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{2t}-e^{t} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}-e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 4

$$\begin{aligned} x' &= x+y \\ y' &= -x+3y \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Χαρακτ. πολ/μος $\det(\lambda I_2 - A) = 0 \iff \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{bmatrix} = 0 \iff$

$$\iff (\lambda-1)(\lambda-3)+1=0 \iff \lambda^2-4\lambda+4=0 \iff (\lambda-2)^2=0.$$

Ιδιοτιμή $\lambda=2$ μοναδική ιδιοτιμή του A.
Για να είναι ο A διαγ/μος, πρέπει $\dim V = 2$.

Αν $\underline{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα, ισχύει $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} \alpha+\beta &= 2\alpha \\ -\alpha+3\beta &= 2\beta \end{aligned} \right| \iff \left| \beta = \alpha \right|$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ ιδιόχωρος. Ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος

Αν ο A ήταν διαγωνοποιήσιμος, θα ήταν όμοιος με τον $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Θα δείξω A όμοιος με τον $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

δηλ. $\exists$ P αντιστρέψιμος τω.

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P$$

P αντιστρ.

$$\Longleftrightarrow PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P \qquad P = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\beta & a+3\beta \\ \gamma-\delta & \gamma+3\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+\gamma & 2\beta+\delta \\ 2\gamma & 2\delta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a-\beta = 2a+\gamma \\ a+3\beta = 2\beta+\delta \\ \gamma-\delta = 2\gamma \\ \gamma+3\delta = 2\delta \end{array} \right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = -a-\gamma \\ \\ \delta = -\gamma \\ \end{array} \right]$$

P αντιστρέψιμος $\Longleftrightarrow \det P \neq 0 \Leftrightarrow a\delta - \beta\gamma \neq 0$.

$$\Leftrightarrow -a\gamma + (a+\gamma)\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma^2 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 0$$

$\gamma = 1$

$a = 1$

$\Rightarrow \beta = -2, \ \delta = -1.$ $\qquad \det P = \gamma^2 = 1.$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = ?$ Πώς υψώνονται οι τιμές των Jordan blocks?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

Άρα $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. Αποδεικνύεται επαγωγικά.

$$e^{At} = e^{P^{-1}J_2Pt} = P^{-1}e^{J_2t}P$$

$$e^{J_2t} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{J_2^\ell t^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} \cdot \begin{pmatrix} 2^\ell & \ell 2^{\ell-1} \\ 0 & 2^\ell \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell 2^\ell}{\ell!} & \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\ell t^\ell 2^{\ell-1}}{\ell!} \\ 0 & \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell 2^\ell}{\ell!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{t^\ell 2^{\ell-1}}{(\ell-1)!} = t\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(2t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} = t\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2t)^m}{m!} = te^{2t}$$

Άρα $e^{At} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

(Άλλος τρόπος: Βρίσκω γενικευμένο ιδ/σμα $\underline{v}$ τ.ω. $[A-2I_2]^2\underline{v} = 0$
Τότε $\underline{\xi} = [A-2I_2]\underline{v}$. $[A-2I_2]\underline{\xi} = 0 \Rightarrow \underline{\xi}$ ιδιοδιάνυσμα.)

$\underline{x}(t) = e^{\rho t}\underline{c}$

$\underline{x}'(t) = \rho e^{\rho t}\underline{c}$

Άρα θέλω $\rho e^{\rho t}\underline{c} = Ae^{\rho t}\underline{c} \Rightarrow Ac = \rho c$

Έχω για ρ ιδιοτιμή, $\underline{c}$ ιδιοδιάνυσμα άρα $x(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Δεύτερη λύση στη μορφή $\underline{x}(t) = (\underline{c}_1 + t\underline{c}_2)e^{2t}$

Για να είναι λύση: $\underline{x}'(t) = \underline{c}_2 e^{2t} + 2e^{2t}(\underline{c}_1 + t\underline{c}_2)$

$\underline{c}_2 e^{2t} + 2e^{2t}(c_1 + tc_2) = Ae^{2t}(\underline{c}_1 + tc_2) = e^{2t}A\underline{c}_1 + tAc_2$

$\underline{c}_2 + 2(\underline{c}_1 + tc_2) = A\underline{c}_1 + tAc_2$

$A\underline{c}_1 - \underline{c}_2 - 2c_1 + t[Ac_2 - 2c_2] = 0$

$\Leftrightarrow Ac_2 = 2c_2$ και $Ac_1 - 2c_1 = c_2$

$\Downarrow \qquad (A - 2I_2)c_1 = c_2$

c_2 ιδιοδιάνυσμα

$c_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$(A-2I_2)^2\underline{c}_1 = (A-2I_2)\underline{c}_2 = \underline{0}$

$A - 2I_2 = \begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$

$c_1 = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

$(A-2I_2)c_1 = c_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\quad b - a = 1$, $b = a+1$

π.χ. $c_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Δεύτερη λύση: $\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)e^{2t}$

$x(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}t\\1+t\end{bmatrix}e^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Άρα: Βήμα 1ο) Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n - A) = \prod_{i=1}(\lambda-\lambda_i)^{m_i} \quad , \sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

Βήμα 2ο) V_{λ_k} ιδιόχωρος για λ_k. Έστω $\dim V_k = a_k \leq m_k$

$V_{\lambda_k} = < \underline{u}_{k1}, \dots, \underline{u}_{ka_k} >$

$\underline{u}_{k1} e^{\lambda_k t}, \dots, \underline{u}_{ka_k} e^{\lambda_k t}$, a_k λύσεις

Γενικά βρίσκουμε $\sum_{i=1}^{k} a_i$ λύσεις

Αν $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i$ Αν π.χ. $a_i < m_i$ πρέπει να βρούμε $m_i - a_i$ ακόμα λύσεις

Θα βρούμε τις υπόλοιπες στη μορφή $(\underline{c}_1 + t\underline{c}_2 + \dots + t\,\underline{c}_{m_i-a_i+1})e^{\lambda_i t}$

$X(t)$ ευσταθής: Αν $x(t,c), x(t,c_1)$. Αν $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |c_1 - c_0| < \delta \Rightarrow |x(t,c) - x(t,c_1)| < \varepsilon$.

Ασυμπτωτικά ευσταθής αν $\lim_{t \to +\infty} (x(t,c) - x(t,c_1)) = 0$

Ευστάθεια Λύσεων

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x'(t) = f(t, x(t))$, $t > t_0$, $x(t_0) = c$

Πότε $x(t;c)$, $t \geq t_0$ ευσταθής λύση?

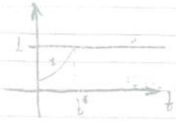
(Liapunov): Όταν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $|\tilde{c} - c| < \delta \Rightarrow |x(t;c) - x(t;\tilde{c})| < \varepsilon$
$\forall t \geq t_0$

Ασυμπτωτικά ευσταθής: Όταν είναι ευσταθής και $\lim\limits_{t \to +\infty} (x(t;\tilde{c}) - x(t,c)) = 0$

Αστάθεια: $\exists \varepsilon_0 > 0$, τ.ω. $\forall \delta > 0$, $\exists \tilde{c} : |c - \tilde{c}| < \delta$ και
$\exists t \geq t_0 : |x(t;\tilde{c}) - x(t,c)| \geq \varepsilon_0$

Παράδειγμα: $x'(t) = x(t)(1 - x(t))$
$\qquad x(0) = c$

Ειδικές λύσεις: $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$ (Στάσιμες λύσεις)



Έστω $y' = y(1-y)$ $\quad t \in [0, +\infty)$
$\qquad y(t^*) = 1$

$y_2(t) \equiv 1$ $\quad$ 1 λύση

$$y_1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq t^* \\ x(t,c), & 0 \leq t < t^* \end{cases}$$

Η $y(1-y)$ τοπικά Lipschitz $\Rightarrow$ μοναδική λύση
Άτοπο

$x(t,c) \uparrow$

$0 < c \leq x(t,c) < 1$ $\quad t \geq 0$ $\quad \exists \lim\limits_{t \to +\infty} x(t,c) = l$

άρα πρέπει $\quad c \leq \lim\limits_{t \to +\infty} x(t,c) \leq 1 \quad \Rightarrow c \leq l \leq 1$

Θα αποδείξουμε: αν $c > 0 \Rightarrow l = 1$ πάντα

$\forall \varepsilon>0\ \exists M>0$ τ.ω. $\forall x\geq M$ $|f(x)-l|<\varepsilon$

(Άσκηση: Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, $l\in\mathbb{R}$ και παρ/μη. Τότε $\exists x_n$ ακολουθία τ.ω. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ και $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n f'(x_n))=0$

$f(x)-f(y)=(x-y)f'(\xi_{x,y})$ (ΘΜΤ)

$x=2n$

$y=n$

$n<\xi_n<2n$

$f(2n)-f(n)=n f'(\xi_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n f'(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(f(2n)-f(n))=l-l=0$ άρα και $\lim\limits_{n\to+\infty} n|f'(x_n)|=0$

$n<x_n<2n$

$n|f'(x_n)|\leq x_n|f'(x_n)|\leq 2n|f'(x_n)|$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n|f'(x_n)|=0$)

$\Rightarrow \exists t_n$ τ.ω. $t_n\to+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n x'(t_n,c)=0$

όμως $x'(t_n)=x(t_n)(1-x(t_n))$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x'(t_n)=\lim x(t_n)(1-x(t_n))=0$

$0=l(1-l)\Rightarrow$ $l=1$ ή $l=0$ Απορ $0<c$

(Άρα η 0 ασταθής)

Αν $0<c<1$

$1-c<\varepsilon \Rightarrow 1-x(t,c)<\varepsilon \ , \ t\geq 0$

Τι γίνεται αν $c>1 \Rightarrow x(t,c)>1$ για $0<t$ μικρά

$x'(t)=\overset{+}{x(t)}\overset{-}{(1-x(t))}<0$

Λόγω μονοσημάντου $x(t)>1, \ t>0 \Rightarrow x'(t)<0, \ t\geq 0$
και πάλι η λύση τείνει ασυμπτωτικά στο 1

$\forall \varepsilon>0$ επιλέγουμε $\delta=\varepsilon$ τότε για $|c-1|<\delta \Rightarrow$
$|x(t,c)-1|<\varepsilon$? Μάλιστα θα δούμε $\lim_{t\to\infty}(x(t,c)-1)=0$
$\Rightarrow x_2(t)\equiv 1$ ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αν $c>1$: $c-1<\varepsilon \Rightarrow 0<x(t,c)-1<x(0,c)-1<\varepsilon$
Αν $0<c<1$: $1-c<\varepsilon \Rightarrow 0<1-x(t,c)<1-x(0,c)<\varepsilon$

Παράδειγμα 2: $x'(t)=x(t)(1-x(t))^2, \ t\geq 0$
$x(0)=c$

Η 0 πάλι ασταθής λύση
Η 1 για $c>1$ ασταθής και μάλιστα έχουμε έκρηξη λύσης

Η μέθοδος της γραμμικοποίησης

Πότε κάθε ιδιοτιμή του A έχει πρ. μέρος αρνητικό
με $x'=Ax$

Να παρασταθούν πως εξελίσσονται οι λύσεις του

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\rho t} \underline{c}$ $\quad$ ρ ιδιοτιμή
c ιδιοδιάνυσμα

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$
$\lambda = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow b = a \quad \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

άρα το $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα $\Rightarrow e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

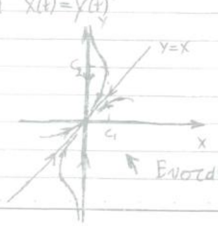
$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Η γενική λύση του $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ είναι

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Για $c_1 = 1, c_2 = 0 \Rightarrow x(t) = e^{-t}, y(t) = e^{-t}$
άρα $x(t) = y(t)$

$x(t) = 0, \; y(t) = e^{-2t}$



Διάγραμμα φάσης

Ευσταθής κόμβος

Για να έχουμε $x(0)=c_1$, $y(0)=c_2$ $\Leftrightarrow \bar{c}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\bar{c}_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\bar{c}_1=c_1$

$\bar{c}_1+\bar{c}_2=c_2$

$\bar{c}_2=c_2-c_1$

$x(t)=c_1e^{-t}$

$y(t)=c_1e^{-t}+(c_2-c_1)e^{-2t}$

$\frac{x(t)}{y(t)}=\frac{c_1e^{-t}}{c_1e^{-t}+(c_2-c_1)e^{-2t}}=\frac{1}{1+\left(\frac{c_2-c_1}{c_1}\right)e^{-t}}$ $\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{y(t)}=1$

Όμως $\lim_{t\to-\infty}\frac{x(t)}{y(t)}=0$

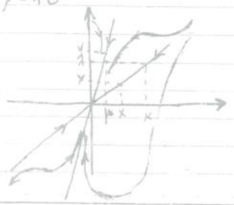
Γενικά $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

I) Διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1<\lambda_2$

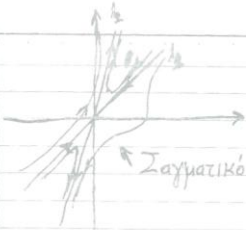
$\lambda_1 \Downarrow \begin{pmatrix}\kappa\\\lambda\end{pmatrix}$ ιδ. διαν. $\qquad \lambda_2 \Downarrow \begin{pmatrix}\mu\\\nu\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\kappa\\\lambda\end{pmatrix}e^{\lambda_1t}+c_2\begin{pmatrix}\mu\\\nu\end{pmatrix}e^{\lambda_2t}$

$x=\kappa e^{\lambda_1t}$, $y=\lambda e^{\lambda_1t}$ $\qquad \frac{x}{y}=\frac{\kappa}{\lambda}$ $\qquad \lambda x-\kappa y=0 \Leftrightarrow (\lambda,-\kappa)(x,y)=0$



Αν $\lambda_1<\lambda_2<0$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Σαγματικό σημείο

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

ασταθής κόμβος

Παράδειγμα: $\underline{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{x}$ Να λυθεί και να γίνει το διάγραμμα φάσης

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda+\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \lambda+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+\frac{1}{2})^2 = 1$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2}+i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -\frac{a}{2} + b = -\frac{a}{2} + ia \\ -a = ib \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow b = ai \quad a\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Λύση: $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} e^{it} = \begin{bmatrix} \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \end{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$

$= \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^{-t/2} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t/2}$

$\Rightarrow$ Δύο γρ. ανεξ. λύσεις: $\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^{-t/2}$, $\begin{bmatrix} \sin b \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t/2}$

$x(t) = (c_1 \sin t + c_2 \cos t) e^{-t/2}$

$y(t) = (c_1 \cos t - c_2 \sin t) e^{-t/2}$

$$c_1\sin t + c_2\cos t$$
$$-\frac{c_1}{c_2} = \tan t$$

$$\|(x,y)\|^2 = x^2(t) + y^2(t) = (c_1\sin t + c_2\cos t)^2 e^{-t} + (c_1\cos t - c_2\sin t)^2 e^{-t}$$
$$= (c_1^2 + c_2^2)e^{-t}$$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, e^{-t/2}$$

$$c_1\sin t + c_2\cos t = 0$$

i) $c_1 = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

$c_1 \neq 0 \Rightarrow \tan t = -\frac{c_2}{c_1} = \tan\theta_0 \Rightarrow t = k\pi + \theta_0, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{dx}{dt}(t_{2k}) = (c_1\cos(2k\pi+\theta_0) - c_2\sin(2k\pi+\theta_0))\, e^{-\frac{1}{2}(2k\pi+\theta_0)}$$
$$= (c_1\cos\theta_0 - c_2\sin\theta_0)\, e^{-\frac{1}{2}(2k\pi+\theta_0)}$$
$$\dots = \frac{\cos\theta_0}{c_1}(c_1^2 + c_2^2)\, e^{-k\pi - \frac{\theta_0}{2}}$$

Το πραγματικό μέρος αποφασίζει αν η σπείρα πάει προς τα μέσα ή έξω.

Παράδειγμα $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\underline{x}$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0$

Αν $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 2

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a - b = 2a \\ a + 3b = 2b \end{array}\right\} \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ μια λύση ~~$\det(\lambda I_2 - A)$~~

$\underline{x} = (\underline{u} + t\underline{v})e^{2t}$

$\underline{x}' = A\underline{x}$ $\qquad x' = ve^{2t} + 2(\underline{u} + t\underline{v})e^{2t}$

οπότε πρέπει $\underline{v}e^{2t} + 2(\underline{u} + t\underline{v})e^{2t} = A(\underline{u} + t\underline{v})e^{2t}$

$(v + 2\underline{u})\cancel{e^{2t}} + 2t\underline{v}\cancel{e^{2t}} = \cancel{e^{2t}}A\underline{u} + t\cancel{e^{2t}}A\underline{v} \Rightarrow$

$\begin{cases} A\underline{u} = v + 2u \\ A\underline{v} = 2\underline{v} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ $\qquad A\underline{u} = 2\underline{u} + v \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_1 + 3b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2b_1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned} a_1 - b_1 &= -1 + 2a_1 \\ a_1 + 3b_1 &= 1 + 2b_1 \end{aligned}\right\} a_1 = 1 - b_1$ $\qquad b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}e^{2t}$

Γεν. λύση: $c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}e^{2t}$

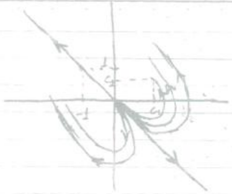
Αν $a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + b\begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}e^{2t}$

και θέλουμε $x(0) = c_1$, $y(0) = c_2$

$a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b - a = c \\ a = c_2 \end{cases}$

$x(t) = (c_1 - (c_1 + c_2)t)e^{2t}$

$y(t) = c_2e^{2t} + (c_1 + c_2)te^{2t}$



Αν $c_1+c_2=0$ $\left.\begin{array}{l} x(t)=c_1 e^{2t} \\ y(t)=c_2 e^{2t}=-c_1 e^{2t} \end{array}\right\} x(t)+y(t)=0$

$x(t)+y(t)=\underbrace{(c_1+c_2)}_{0}e^{2t}$

$\frac{x(t)}{y(t)}=\frac{(c_1-(c_1+c_2)t)\cancel{e^{2t}}}{(c_2+(c_1+c_2)t)\cancel{e^{2t}}}$ $\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{y(t)}=-1$

Παράδειγμα: $\underline{x}'=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}$

Ιδιοτιμές $\lambda=\pm 4i$

~~Δύο λύσεις είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(4t)$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\sin 4t$~~

Γεν. λύση $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(4t)+b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\sin(4t)$

$x(0)=c_1$ $y(0)=c_2$

Δύο λύσεις είναι $\begin{pmatrix} \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{pmatrix}$

Δύο λύσεις είναι (cos4t) , (sin4t)

Γεν. Λύση $\binom{x}{y} = a\begin{pmatrix}\cos 4t\\ 2\sin 4t\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\sin 4t\\ -2\cos 4t\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}\cos 4t\\ 2\sin 4t\end{bmatrix} - \frac{c_2}{2}\begin{bmatrix}\sin 4t\\ -2\cos 4t\end{bmatrix}$

$x(t) = c_1\cos 4t - \frac{c_2}{2}\sin 4t$
$y(t) = 2c_1\sin 4t + c_2\cos 4t$

$\left.\begin{matrix}4c_1\cdot x(t)\\ c_2\cdot y(t)\end{matrix}\right\} 4c_1x(t) + c_2y(t) = 4c_1^2\cos 4t + c_2^2\cos 4t$
$= (4c_1^2 + c_2^2)\cos 4(t)$

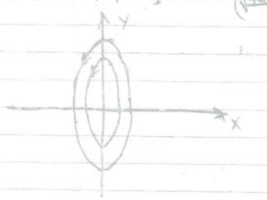
$2c_2x(t) - 2c_1y(t) = (c_2^2 + 4c_1^2)\sin 4t$

$\Rightarrow (4c_1x + c_2y)^2 + (2c_1y - 2c_2x)^2 = (c_2^2 + 4c_1^2)$

$\Rightarrow 4(4c_1^2 + c_2^2)x^2 + (4c_1^2 + c_2^2)y^2 = (4c_1^2 + c_2^2)^2$

I) Αν $4c_1^2 + c_2^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

II) Αν $4c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ $\quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{4c_1^2+c_2^2}{4}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{4c_1^2+c_2^2}\right)^2} = 1$ έλλειψη



$2x'(t) = -8c_1\sin 4t - 4c_2\cos 4t$
$2x'(0) = -4c_2$

Διάγραμμα φάσης

→ Ιδιοτιμές χωρίς πραγματικό μέρος 0

$\underline{x}' = A\underline{x} + f(\underline{x}) \qquad |f(\underline{x})| \leq M|\underline{x}|^{1+\sigma}, \ \sigma > 0, \ |\underline{x}| \leq 1$

$\underline{x}' = \underline{G}(\underline{x})$ Αυτόνομη (δεν εξαρτάται από το χρόνο)

(Π.χ. $x' = -x + x(x^2+y^2)$
$y' = -2y + y(x^2+y^2)$

$\left.\begin{array}{l} -x + x(x^2+y^2) = 0 \\ -2y + y(x^2+y^2) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x(x^2+y^2-1) = 0 \\ y(x^2+y^2-2) = 0 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y(x^2+y^2-2) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (0,\sqrt{2}), (0,-\sqrt{2})$

$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-1 = 0 \\ y(x^2+y^2-2) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) \in \{(1,0), (-1,0)\}$)

Στάσιμες λύσεις: x_0 στάσιμη λύση αν $G(x_0) = 0$
x_0 σταθερό ή και μη! π.χ. ένας κύκλος.

Για $\underline{x}' = \underline{G}(\underline{x})$, $G \in C^2$, x_0 στάσιμη λύση $\underline{x}' = \nabla \underline{G}(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0) + \underline{Q}(\underline{x})$
με $\|\underline{Q}(\underline{x})\| \leq M\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2$

$e^{At}c$

Θεώρημα: Έστω η ΔΕ $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f}(\underline{x})$ όπου A σταθερός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\underline{f}$ τέτοια ώστε $\|\underline{f}(\underline{x})\| \leq M\|\underline{x}\|^{1+\sigma}$, $\sigma > 0$ και $\|x\|<1$. Έστω ότι κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A έχει πραγματικό μέρος αρνητικό. Τότε το $\underline{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση.

(Η $\underline{0}$ είναι ασ. ευσταθής όταν i) Είναι ευσταθής ii) $\lim_{t\to+\infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$
i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \ \forall t$)

Απόδειξη

Γενικά $\underline{y}(t) = e^{At}y_0$ για το $\left\{ \begin{array}{l} \underline{y}' = A\underline{y} \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{array} \right\}$ τότε

$\|y(t)\| \leq c e^{-\rho t}\|y_0\|$ με $Re(\lambda_i) < -\rho < 0$

$e^{-At}\underline{x}' - e^{-At}A\underline{x} = e^{-At}\underline{f}(\underline{x}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\underline{x}(t)\right) = e^{-At}\underline{f}(\underline{x}(t))$

$= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{-As}\underline{f}(\underline{x}(s))ds\right] \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t) - \int_0^t e^{-As}\underline{f}(\underline{x}(s))ds\right] = 0$

$e^{-At}\underline{x}(t) - \int_0^t e^{-As}\underline{f}(\underline{x}(s)) = x(0) \Rightarrow$

$e^{-At}\underline{x}(t) = \underline{x}(0) + \int_0^t e^{-As}\underline{f}(\underline{x}(s))ds$

$$x(t) = e^{At}\underline{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}\underline{f}(\underline{x}(s))ds$$
$$= e^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\underline{f}(\underline{x}(s))ds$$

Αν επιλέξω $\delta < 1$ για μικρούς χρόνους $\|x(t)\| \leq 1$

Τότε όμως $\|x(t)\| \leq \|e^{At}x(0)\| + \|\int_0^t e^{A(t-s)} \underline{f}(\underline{x}(s)) ds\|$

$$\leq c e^{-\rho t}\|x(0)\| + c\int_0^t e^{-\rho(t-s)} \|\underline{f}(x(s))\| ds$$

$$\leq c_1 e^{-\rho t}\|x_0\| + c_2\int_0^t e^{-\rho(t-s)} \|\underline{x}(s)\|^{1+\sigma} ds$$

Θέλουμε $\|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq c e^{-\rho t}\|x(0)\| + c_2\int_0^t e^{-\rho(t-s)} \varepsilon^\sigma \|x(s)\| ds$$

$$\leq c_1 e^{-\rho t}\|\underline{x}(0)\| + c_2 \varepsilon^\sigma \int_0^t e^{-\rho(t-s)} \|x(s)\| ds$$

$$\Rightarrow e^{\rho t}\|x(t)\| \leq c_1\|x(0)\| + c_2 \varepsilon^\sigma \int_0^t e^{\rho s}\|x(s)\| ds$$

Αν $\sigma(t) = e^{\rho t}\|x(t)\| \Rightarrow \sigma(t) \leq \underbrace{k_1 + k_2\int_0^t \sigma(s) ds}_{F(t)} \quad t \geq 0$

$F'(t) = k_2\sigma(t) \Rightarrow \frac{1}{k_2}F'(t) \leq F(t)$

$\Rightarrow F'(x) \leq k_2 F(x) \quad \Rightarrow e^{-k_2 t}F(t) \leq F(0) = k_1$

$\Rightarrow F(t) \leq k_1 e^{k_2 t}$

$$e^{\rho t}\|x(t)\| \leq k_1 e^{k_2 t} \Rightarrow \|x(t)\| \leq k_1 e^{-(\rho - k_2)t}$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq c_1\|x(0)\| e^{-(\rho - c_2\varepsilon^\sigma)t}$$

Αν $c_2\varepsilon^\sigma < \frac{\rho}{2}$

$$\leq c_1\|x(0)\| e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

Αν $c_1 \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{\rho}{2}t} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Άσκηση: $A(t)\int_a^b A(s)\,ds = \int_a^b A(s)\,ds\, A(t) \overset{?}{\Longrightarrow} A(t)A(s) = A(s)A(t)$

$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f}(x)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$0 < \rho < \mathrm{Re}\,\lambda$, $\forall \lambda$ ιδιοτιμή του A

0 ασταθής λύση

Το διάγραμμα φάσης του $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f}(x)$ και του αντίστοιχου γραμμικού $\underline{y}' = A\underline{y}$ κοντά στο 0 είναι ποιοτικά ίδια όταν ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος 0

Ανταγωνιστικά μοντέλα: Συμβίωση κουνελιών-αλεπούδων

Έστω $x(t) :=$ κουνέλια (μάζα)

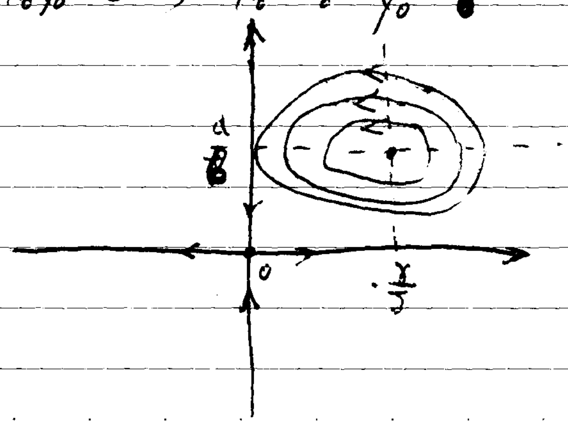
$y(t) :=$ αλεπούδες (μάζα)

$$x'(t) = a x(t) - b x(t) y(t) \qquad a,b>0$$
$$y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t) \qquad \gamma,\delta>0$$

Διάγραμμα φάσης?

Στατικές λύσεις: $\left.\begin{aligned} a x_0 - b x_0 y_0 &= 0 \\ -\gamma y_0 + \delta x_0 y_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$ $x_0 = 0 \quad y_0 = 0$ ή $x_0 = \frac{\gamma}{\delta} \quad y_0 = \frac{a}{b}$

$$x'(t) = a x(t)$$
$$y'(t) = -\gamma y(t)$$



$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{b\gamma}{\delta} \\ \frac{a\delta}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\gamma}{\delta} + X \\ y &= \frac{a}{b} + Y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X'(t) &= a\left(\frac{\gamma}{\delta} + X\right) - b\left(\frac{\gamma}{\delta} + X\right)\left(\frac{a}{b} + Y\right) \\ Y'(t) &= -\gamma\left(\frac{a}{b} + Y\right) + \delta\left(\frac{\gamma}{\delta} + X\right)\left(\frac{a}{b} + Y\right) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} X'(t) &= \frac{a\gamma}{\delta} + aX - b\left(\frac{a\gamma}{b\delta} + \frac{a}{b}X + \frac{\gamma}{\delta}Y + XY\right) \\ Y'(t) &= -\frac{a\gamma}{b} - \gamma Y + \delta\left(\frac{a\gamma}{b\delta} + \frac{a}{b}X + \frac{\gamma}{\delta}Y + XY\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\frac{b\gamma}{\delta}Y - bXY \\ Y'(t) &= \frac{a\delta}{b}X + \delta XY \end{aligned}$$

→ πρ. μέρος 0 για τις ιδιοτιμές του γραμμικού

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\left(a - by(t)\right) \\ y'(t) &= y(t)\left(-\gamma + \delta x(t)\right) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-\gamma + \delta x)}{x(a - by)}$$

$$\frac{(a - by)}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-\gamma + \delta x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\frac{y}{a - by}} = \frac{dx}{\frac{x}{-\gamma + \delta x}}$$

$$\frac{d}{dx}(a\ln y - by) = \frac{d}{dx}(-\gamma \ln x + \delta x) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(a\ln y - by + \gamma \ln x - \delta x) = 0$$

$$a\ln y - by = c + \delta x - \gamma \ln x \Leftrightarrow$$

$$e^{a\ln y - by} = e^{c + \delta x - \gamma \ln x}$$

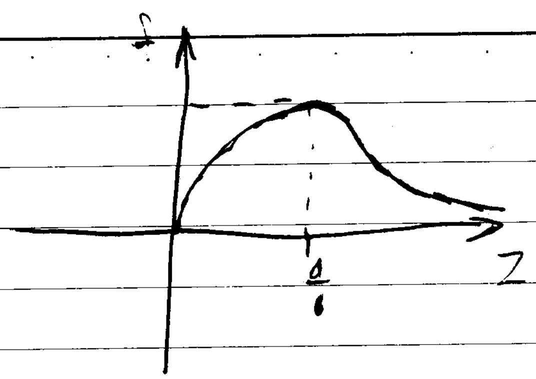
$$y^a e^{-by} = \underbrace{e^c}_{k>0} \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma}$$

Θα μελετήσουμε την $f(z) = z^a e^{-bz}$, $z > 0$, $a, b > 0$

$$f'(z) = az^{a-1}e^{-bz} - bz^a e^{-bz} = z^{a-1}e^{-bz}(a - bz)$$

$f'(z) > 0$ για $z < \frac{a}{b}$

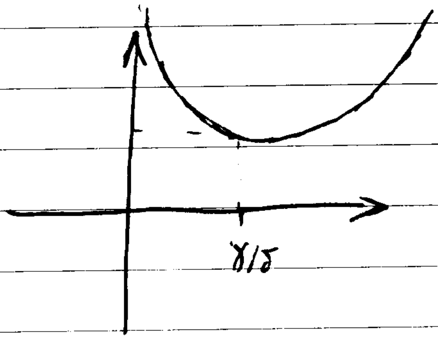
$f'(z) < 0$ για $z > \frac{a}{b}$



$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a}$$

$$g(z) = \frac{e^{\delta z}}{z^\gamma}$$

$$g'(z) = -\gamma \frac{e^{\delta z}}{z^{\gamma+1}} + \delta \frac{e^{\delta z}}{z^\gamma} = \frac{e^{\delta z}}{z^{\gamma+1}}(-\gamma + \delta z)$$



$$g\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^\gamma e^\gamma$$

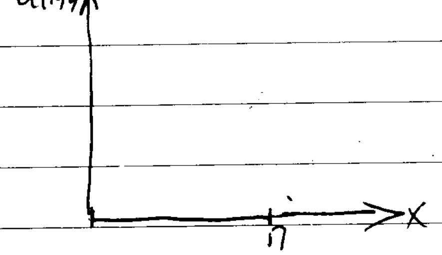
Προβλήματα συνοριακών τιμών

Η εξίσωση της Θερμότητας: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$ $\quad 0<x<\pi$, $t>0$

Αρχικές συνθήκες $u(x,0) = \varphi(x)$ $\quad 0 \le x \le \pi$

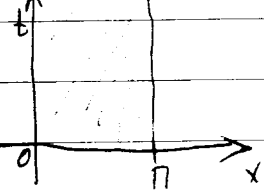
Συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = 0$, $t>0$

$u(\pi,t) = 0$, $t>0$.



Η επίλυση προκύπτει μέσα από εύρεση πολλών ειδικών λύσεων

$u(x,t) = T(t)A(x)$



$u_t(x,t) = T'(t)A(x)$

$u_x(x,t) = T(t)A'(x)$

$u_{xx}(x,t) = T(t)A''(x)$

Αν η u λύνει τη Δ.Ε. παίρνουμε $T'(t)A(x) = T(t)A''(x)$ $\quad 0<x<\pi$, $t>0$

$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} \quad \forall t>0 \quad \forall x \in (0,\pi)$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda$

$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \Leftrightarrow T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad \Rightarrow T(t) = T(0)e^{-\lambda t}$

$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda \Leftrightarrow A''(x) + \lambda A(x) = 0 \quad , 0<x<\pi$

$u(0,t) = 0 \Leftrightarrow T(t)A(0) = 0 \quad \forall t>0 \Rightarrow A(0) = 0$ (Dirichlet συνοριακές συνθήκες)

$u(\pi,t) = 0 \qquad \Rightarrow A(\pi) = 0$

Πρόβλημα Σ.Σ. $A''(x) + \lambda A(x) = 0 \quad , 0<x<\pi$

$A(0) = A(\pi) = 0$

είναι η εύρεση των τιμών της παραμέτρου λ (εύρεση ιδιοτιμών).

ώστε το πρόβλημα να έχει μη τετριμένη λύση (ιδιοσυναρτήσεις)

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: Ψάχνουμε λύση στη μορφή
$A(x) = e^{\rho x} \Rightarrow \rho^2 + \lambda = 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις: i) $\lambda = 0 \Rightarrow$ Γεν. λύση: $A(x) = c_1 + c_2 x$ $\quad x \in (0, \pi)$
Θέλουμε $A(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$ και $A(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \Rightarrow A(x) \equiv 0$
Απορρίπτεται ως τετριμένη

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda}$

Γεν. λύση: $A(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$, $x \in (0, \pi)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

όμως $\left.\begin{aligned} A(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ A(\pi) = 0 &\Leftrightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{aligned}\right\}$

$c_2 = -c_1$
$c_1 (e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}) = 0$
$e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ Απορ. διότι $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow A(x) \equiv 0$

iii) $\lambda > 0$ $\quad \rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 = -\lambda \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{\lambda} i$

$e^{\sqrt{\lambda} i x}$, $e^{-\sqrt{\lambda} x i}$
$\cos(\sqrt{\lambda}x) + i\sin(\sqrt{\lambda}x)$

Δύο λύσεις: $\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\sin(\sqrt{\lambda}x)$

Γεν. λύση: $A(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, $0 < x < \pi$

$A(0) = 0$: $c_1 + c_2 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
$A(\pi) = 0$: $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$
$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 = \sin(\pi) \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, k φυσικός
$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$
Άρα $A_k(x) = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$

Στο αρχικό πρόβλημα $u_k(x,t) = T_k(t) A_k(x) = e^{-k^2 t} \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$
Η Γενική λύση θα είναι $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$

$2\cos 2\theta =$
$\cos x \cos y$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα c_k ώστε $u(x,0)=\varphi(x)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kx) = \varphi(x) \quad \text{Σειρά Fourier}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(mx)\sin(kx) = \varphi(x)\sin(mx) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} \Big(\sum \qquad\Big) dx = \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(mx)\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(mx)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx$$

Αν $k=m$: $\int_0^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2kx\,dx = \frac{\pi}{2}$

Αν $k \neq m$. Γενικά $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos((k-m)x) - \cos((k+m)x)}{2}\,dx = 0$$

$$c_m \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(mx)\,dx \Rightarrow c_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(mx)\,dx, \quad m=1,2,\dots$$

Δεύτερο πρόβλημα Ι.Σ : $A''(x) + \lambda A(x) = 0$, $0<x<\pi$
$A(0)=0$, $A'(\pi)=0$
(Άσκηση)

Τρίτο πρόβλημα Σ.Σ. $A''(x)+\lambda A(x)=0$, $0<x<2\pi$

Περιοδικές Σ.Σ. $A(0)=A(2\pi)$, $A'(0)=A'(2\pi)$ (Neuman Σ.Σ.)

Λύση

Χαρ. εξίσωση : $\rho^2+\lambda=0$ (ψάχνουμε λύση της μορφής $e^{\rho x}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις: i) $\lambda=0 \Rightarrow A(x)=c_1+c_2x$, $0<x<2\pi$

$A(0)=A(2\pi) \Leftrightarrow c_1=c_1+c_2 2\pi \Leftrightarrow c_2=0$

$A'(0)=A'(2\pi) \Leftrightarrow c_2=c_2$

$\lambda_0=0$ είναι ιδιοτιμή με $A_0(x)=1$

ii) $\lambda<0 \Rightarrow A(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$A(0)=A(2\pi) \Leftrightarrow c_1+c_2=c_1e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} \Leftrightarrow$

$c_1(e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}-1)+c_2(e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}-1)=0$ ①

$A'(0)=A'(2\pi) \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}c_1-\sqrt{-\lambda}c_2=\sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}-\sqrt{-\lambda}c_2e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}$

$\Leftrightarrow c_1(e^{\sqrt{-\lambda}2\pi}-1)-c_2(e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}-1)=0$ ②

$\left.\begin{matrix}①\\②\end{matrix}\right\}$ $c_1=c_2=0$ Απορ

iii) $\lambda>0 \Rightarrow A(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$A(0)=A(2\pi) \Leftrightarrow c_1=c_1\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \Leftrightarrow$

$c_1(\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$ ①

$A'(x)=-\sqrt{\lambda}c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+\sqrt{\lambda}c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$A'(0)=A'(2\pi) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}c_2=-\sqrt{\lambda}c_1\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+\sqrt{\lambda}c_2\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)$

$\Leftrightarrow -c_1\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+c_2(\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi)-1)=0$ ②

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1 & \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Det = (\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=1 \end{array}\right\} \sqrt{\lambda}2\pi = 2k\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda}=k \Rightarrow \lambda=k^2$$

$\lambda_k = k^2$ Άρα

$$c_1(\cos(2k\pi)-1) + c_2\sin(2k\pi) = 0 \Leftrightarrow 0=0$$

Δύο λύσεις (ιδιοσυναρτήσεις) $\cos(kx)$, $\sin(kx)$

Δηλαδή $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0(x) = 1$

$\lambda_k = k^2 \Rightarrow \varphi_k(x) = \cos(kx)$, $\psi_k(x) = \sin(kx)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

ταρτο πρόβλημα συνοριακών τιμών: $A''(x)+\lambda A(x)=0$, $0<x<\pi$

$(0)=0$ $A'(\pi)+A(\pi)=0$ (Robin Σ.Σ.)

Λύση

ρ. εξίσωση: $\rho^2+\lambda=0$.

ακρίνουμε τις περιπτώσεις i) $\lambda=0 \Rightarrow A(x)=c_1+c_2x$

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0 \\ A'(\pi)+A(\pi)=0 \Leftrightarrow c_2+c_2\pi=0 \Rightarrow c_2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1=c_2=0 \\ \text{Απορ} \end{array}$$

ii) $\lambda<0 \Rightarrow A(x)=c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$A(0)=0 \Leftrightarrow c_1+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-c_1$

$A'(\pi)+A(\pi)=0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})+c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0$

$\Leftrightarrow c_1\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})+c_1(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})=0$

$\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}+e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0$ Αδύνατη αφού
$e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}>0$ Άρα $c_1=0 \Rightarrow c_2=0$ Απορ

iii) $\lambda>0$: $A(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$A(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0$

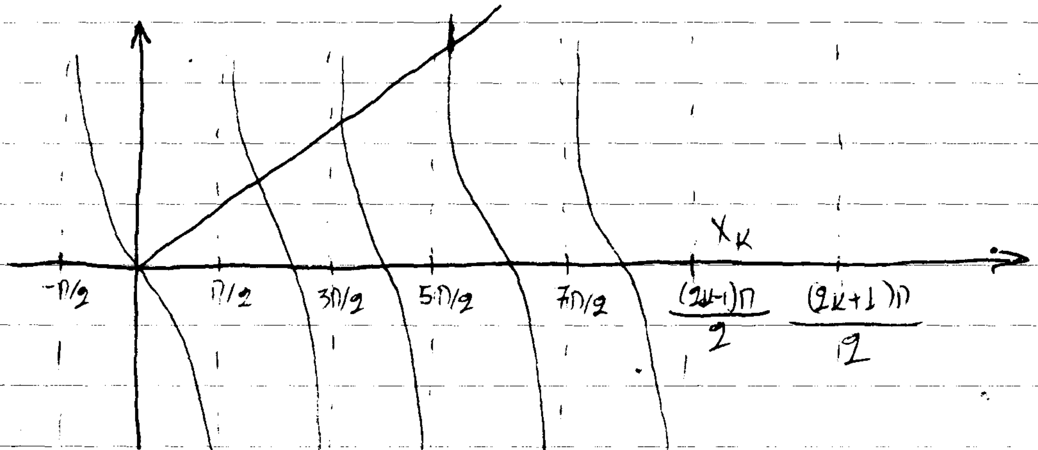
$A'(\pi)+A(\pi)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$

Πρέπει $\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$
$\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\neq 0$ διότι αν ήταν $\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=\pm 1 \Rightarrow$ εξίσωση αδύνατη

Άρα $\sqrt{\lambda}+\tan(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Rightarrow \tan(\sqrt{\lambda}\pi)=-\sqrt{\lambda}$

~~Έστω $\sqrt{\lambda}=x \Rightarrow x=-\tan(\pi x)$~~

Έστω $\sqrt{\lambda}\pi=x \Rightarrow \frac{x}{\pi}=-\tan(x)$



με $\frac{x_k}{\frac{(2k-1)\pi}{2}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$

Προβλήματα συνοριακών τιμών: $(p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0$

$$a < x < b$$

$$a_0 y(a) + b_0 y'(a) = 0 \quad a_0^2 + b_0^2 \neq 0$$
$$a_1 y(b) + b_1 y'(b) = 0 \quad a_1^2 + b_1^2 \neq 0$$

Ελλειπτικού τύπου: Ομοιόμορφα ελλειπτικού τύπου

$p \geq 0$ $\qquad 0 < k \leq p(x) \leq 1 \quad \forall x \in [a,b]$

~~Η πιο απλή περίπτωση~~

Ειδική περίπτωση $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $r(x) \equiv 1$: $y''(x) + \lambda y(x) = 0$

$y'(a) = 0$ $\qquad a < x < b$

$a_1 y(b) + b_1 y'(b) = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$

Χαρ. εξίσωση: $y(x) = e^{\rho x} \Rightarrow \rho^2 + \lambda = 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: i) $\lambda = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$, $a < x < b$

$$y'(x) = c_2, \quad y'(a) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = c_1 \\ a_1 y(b) + b_1 y'(b) = 0 \end{array}\right\} a_1 c_1 = 0$$

Εαν $a_1 \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$ Απορ.

Εαν $a_1 = 0 \Rightarrow y(x) = 1$ λύση, ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$

ii) $\lambda < 0 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{-\lambda}$

Γενική λύση $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ $\quad x \in [a,b]$

$$y'(x) = \sqrt{-\lambda}\left[c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right]$$

$$y'(a) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}a} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}a} = 0 \Rightarrow$$

$$c_2 = c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}a}$$

$a_1 y(b) + b_1 y'(b) = 0 \Leftrightarrow$

$a_1 (c_1 e^{\sqrt{-\lambda} b} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} b}) + b_1\sqrt{-\lambda}(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}b} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}b}) = 0 \Rightarrow$

$a_1 (c_1 e^{\sqrt{-\lambda}b} + c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}a - \sqrt{-\lambda}b}) + b_1\sqrt{-\lambda}(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}b} - c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}a-\sqrt{-\lambda}b}) = 0$

$c_1 e^{\sqrt{-\lambda}b}[a_1(1+e^{2\sqrt{-\lambda}(a-b)}) + b_1\sqrt{-\lambda}(1-e^{2\sqrt{-\lambda}(a-b)})] = 0$

Ερώτημα: Πότε $[\quad\quad] = 0$?

$a_1 + a_1 e^{2\sqrt{-\lambda}(a-b)} + b_1\sqrt{-\lambda} - b_1\sqrt{-\lambda}e^{2\sqrt{-\lambda}(a-b)} = 0$

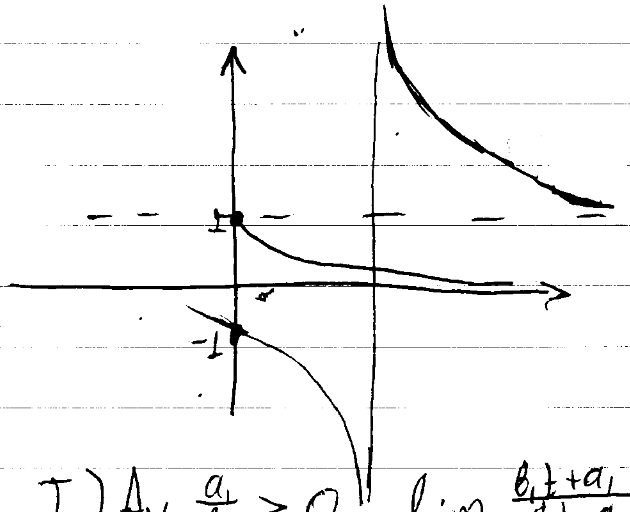
$a_1 + b_1\sqrt{-\lambda} = e^{2\sqrt{-\lambda}(a-b)}(b_1\sqrt{-\lambda} - a_1)$ *

Αν $\left.\begin{aligned} b_1\sqrt{-\lambda} - a_1 = 0 \Rightarrow \\ b_1\sqrt{-\lambda} + a_1 = 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{aligned}$ Άτοπ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$

Άρα * $\Leftrightarrow$ $e^{2\sqrt{-\lambda}(a-b)} = \frac{a_1 + b_1\sqrt{-\lambda}}{b_1\sqrt{-\lambda} - a_1}$

Έστω $\sqrt{-\lambda} = t$

** $e^{2(a-b)t} = \frac{b_1 t + a_1}{b_1 t - a_1}$ $\quad a < b$, $t > 0$

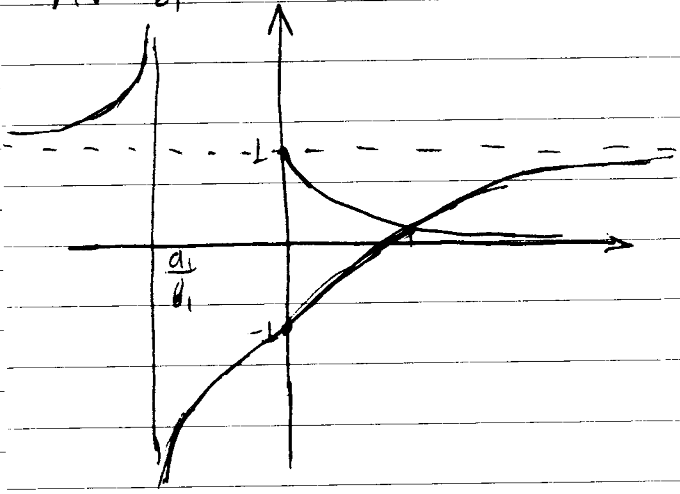


Έστω $b_1 \neq 0$: $t = \frac{a_1}{b_1}$

I) Αν $\frac{a_1}{b_1} > 0$ $\quad \lim_{t \to \frac{a_1}{b_1}^-} \frac{b_1 t + a_1}{b_1 t - a_1} = -\infty$

Επομένως στην περίπτωση $\frac{a_1}{b_1} > 0$ δεν υπάρχει αρνητική ιδιοτιμή

Αν $\frac{a_1}{b_1}<0$



Άρα ακριβώς 1 αρνητική ιδιοτιμή

iii) $\lambda>0$ $\quad \rho=\pm\sqrt{\lambda}\,i$

Γεν. λύση Δ.Ε. $y(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$y'(x)=\sqrt{\lambda}\left(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)\right)$

$y'(a)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\left(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}a)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}a)\right)=0 \Leftrightarrow$

$c_2\cos(\sqrt{\lambda}a)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}a)$

$a_1y(b)+b_1y'(b)=0 \Rightarrow a_1\left(c_1\cos(\sqrt{\lambda}b)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}b)\right)+b_1\sqrt{\lambda}\left(-c_1\sin(\sqrt{\lambda}b)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}b)\right)=$

$$\begin{cases} c_1\left(a_1\cos(\sqrt{\lambda}b)-b_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b)\right)+c_2\left(a_1\sin(\sqrt{\lambda}b)+b_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}b\right)=0 \\ \sin(\sqrt{\lambda}a)c_1-\cos(\sqrt{\lambda}a)c_2=0 \end{cases}$$

$Det=-\cos(\sqrt{\lambda}a)\left(a_1\cos(\sqrt{\lambda}b)-b_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b)\right)-\sin(\sqrt{\lambda}a)\left(a_1\sin(\sqrt{\lambda}b)+b_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}b)\right)=0 \Rightarrow$

$a_1\cos(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}b)-b_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}b)+a_1\sin(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}b)$
$+b_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}b)=0 \Leftrightarrow$

$a_1\cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) - b_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}(b-a))=0$

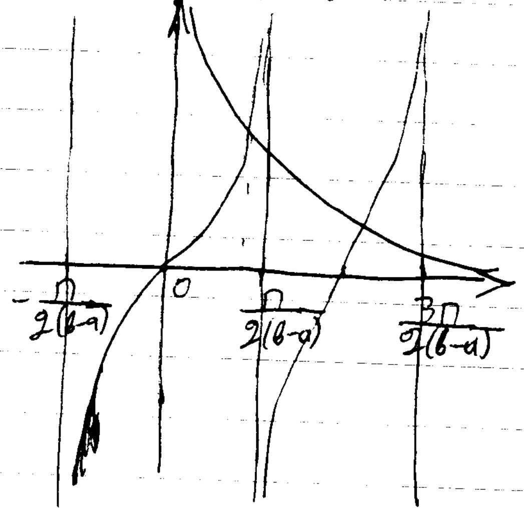
Συνέχεια 2º Θέμα

Σ.Δ.Ε.

Αν $b_1 \neq 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) \neq 0 \Leftrightarrow$

$a_1 - b_1\sqrt{\lambda}\tan(\sqrt{\lambda}(b-a)) = 0 \Rightarrow \tan(\sqrt{\lambda}(b-a)) = \frac{\frac{a_1}{b_1}}{\sqrt{\lambda}}$

Έστω $\sqrt{\lambda} = t$

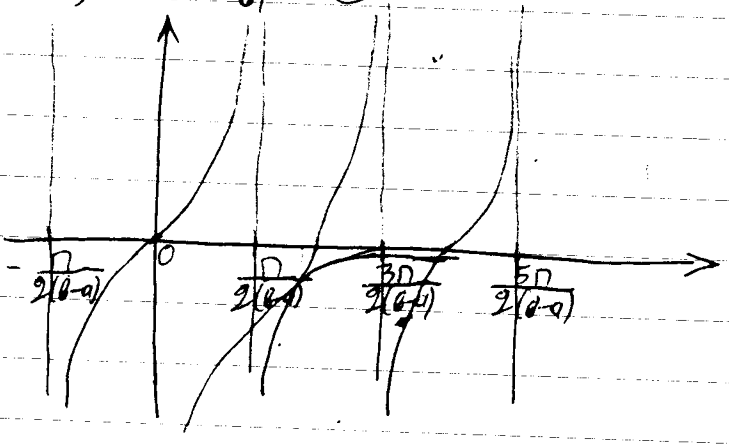


$t_k(b-a) = (2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$t_k = (2k-1)\frac{\pi}{2(b-a)}$

Άπειρες ιδιοτιμές

I) Αν $\frac{a_1}{b_1} > 0$ ↗ και $\lim_{k\to+\infty}\left(t_k - \frac{2k\pi}{2(b-a)}\right) = 0$ ή $\lim_{k\to+\infty}\left(\sqrt{\lambda_k} - \frac{k\pi}{(b-a)}\right)$

II) Αν $\frac{a_1}{b_1} < 0$



$\lim_{k\to+\infty}\left(\sqrt{\lambda_k} - \frac{(k+1)\pi}{b-a}\right) = 0$

Άπειρες ιδιοτιμές

Για $(p(x)y'(x))' + (q(x)+\lambda r(x))y(x) = 0 \qquad a<x<b$

$a_0 y(a) + b_0 y'(a) = 0 \;, \; a_0^2 + b_0^2 \neq 0$
$a_1 y(b) + b_1 y'(b) = 0 \;, \; a_1^2 + b_1^2 \neq 0$

$p \in C^1[a,b] \;, \; 0 < K \leq p \leq$

Μετασχηματισμός Prüfer

Θέτοντας τον μετασχηματισμό

$p(x) y'(x) = r_1(x)\cos\theta(x)$
$y(x) = r_1(x)\sin\theta(x)$

$r(x) = \sqrt{y^2(x) + (p(x)y'(x))^2}$ δεν μηδενίζεται αλλιώς

το σύστημα $\left.\begin{aligned} y^2(x) &= 0 \\ (p(x)y'(x))^2 &= 0 \end{aligned}\right\} y(x) = 0$

$\sin\theta(x) = \dfrac{y(x)}{\sqrt{y^2(x) + (p(x)y'(x))^2}}$
$\cos\theta(x) = \dfrac{y'(x)p(x)}{\sqrt{}}$

$\left(\begin{aligned} \sin\theta &= \xi \\ \cos\theta &= \eta \end{aligned}\right.$ έχει λύση $\iff \xi^2 + \eta^2 = 1 \Big)$

Η συνάρτηση $r_1(x)$ είναι παρ/μη καθώς $y^2(x) + (y'(x))^2 p^2(x) \neq 0$

Η συνάρτηση $\theta(x)$ μηδενίζεται για $k\pi + \frac{\pi}{2}$
Μακριά από αυτά τα $\theta(x)$ $\quad \tan\theta(x) = \frac{y(x)}{p(x)y'(x)}$
$\theta(x) = \arctan\left(\frac{y(x)}{p(x)y'(x)}\right)$

$$\tan\theta(x) = \frac{y(x)}{p(x)y'(x)} \Rightarrow \left(1+\tan^2\theta(x)\right)\theta'(x) = \frac{1}{p(x)} - \frac{y(x)\left(p(x)y'(x)\right)'}{\left(p(x)y'(x)\right)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta(x)}\,\theta'(x) = \frac{1}{p(x)} - \frac{y(x)}{\left(y'(x)p(x)\right)^2}\left(-V(x)y(x)\right) \quad , V(x) = q(x)+\lambda r(x)$$

$$\theta'(x) = \frac{1}{p(x)}\cos^2\theta(x) + V(x)\sin^2\theta(x)$$

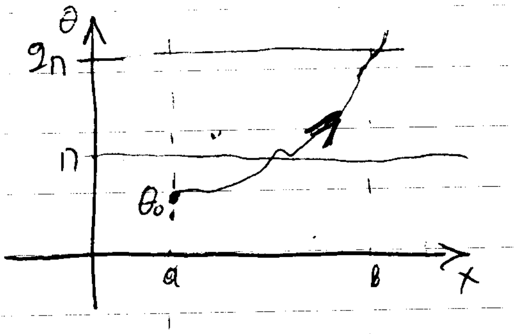
$$r_1^2(x) = y^2(x) + \left(p(x)y'(x)\right)^2 \Rightarrow$$

$$2r_1(x)r_1'(x) = 2y(x)y'(x) + 2p(x)y'(x)\left(p(x)y'(x)\right)' \Rightarrow$$

$$r_1(x)r_1'(x) = y(x)y'(x) + p(x)y'(x)\left[-V(x)y(x)\right]$$

$$= r_1^2(x)\frac{\sin\theta\cos\theta}{p(x)} - V(x)r_1^2(x)\sin\theta(x)\cos\theta(x) \Rightarrow$$

$$r_1'(x) = \left(\frac{1}{p(x)} - V(x)\right)r_1(x)\sin\theta(x)\cos\theta(x)$$



$$\tan\theta(a) = \frac{y(a)}{p(a)y'(a)} = -\frac{\beta_0}{\alpha_0 p(a)} \qquad \tan\theta(b) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1 p(b)}$$

$$= \tan\theta_0$$

Αν υπήρχε ξ τ.ω. $\theta(\xi) = 0 \Rightarrow \theta'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} > 0$

$\theta(x) > 0,\ x < \xi$ $\quad \frac{\theta(x)-\theta(\xi)}{x-\xi} < 0 \quad \lim_{x\to\xi}\frac{\theta(x)-\theta(\xi)}{x-\xi} \le 0 \Rightarrow \theta'(\xi) \le 0$

$\theta(\xi) = 0$

Αντίφαση $\theta'(\xi) > 0$

$g(1)f'(1) = -f'(0)$

Έστω η Δ.Ε. $x''(t) + (1+t^2)x(t) = 0$ και f, g δύο λύσεις αυτής τ.ω. $f(0)=f(1)=0$, $f(t)>0$, $t\in(0,1)$

$g'(0)=0$, $g(0)=1$

Αποδείξτε ότι η g έχει ρίζα στο $(0,1]$ ελλιπώς

$$W(f,g) = \det\begin{pmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t)\end{pmatrix} = W(t)$$

$$W'(t) = \det\begin{pmatrix} f'(t) & g'(t) \\ g'(t) & g'(t)\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} f(t) & f''(t) \\ g(t) & g''(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) & -(1+t^2)f(t) \\ g(t) & -(1+t^2)g(t)\end{pmatrix} = 0$$

$$W'(t) = 0 \Rightarrow W(t) = W(0) = \det\begin{pmatrix} f(0) & f'(0) \\ g(0) & g'(0)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & f'(0) \\ 1 & 0\end{pmatrix} = -f'(0)$$

$$\Rightarrow f(t)g'(t) - g(t)f'(t) = -f'(0) \quad t\in[0,1]$$

$$t=1 \Rightarrow g(1)f'(1) = f'(0) \Rightarrow g(1) = \frac{f'(0)}{f'(1)} < 1$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''+(1+t^2)f=0 \end{cases}\right\} f\equiv 0 \quad \text{Άτοπο } f>0$$

$f(t) > 0$, $f(1)=0$

$$\frac{f(t)-f(1)}{t-1} < 0 \quad t<1$$

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{f(t)-f(1)}{t-1} \leq 0$$

$$\left.\begin{matrix} f'(1)\leq 0 \\ f(1)\neq 0 \end{matrix}\right\} f'(1)<0$$

Αντίστοιχα $f'(0) > 0$

$$W(t) = \det[f_1 \ldots f_n] = \det\begin{bmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(n-1)} \\ f_n & f_n' & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$W'(t) = \det\begin{bmatrix} f_1' & f_1' \\ f_2' & f_2' \\ f_n' & f_n' \end{bmatrix} + \ldots = \begin{bmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1' \\ \cdots & & & \\ f_n & f_n' & \cdots & f_n' \end{bmatrix}$$

$$f_i^{(n)}(t) = -a_1(t) f_i^{(n-1)}(t) - a_2(t) f_i^{(n-2)} - \ldots - a_n(t) f_i(t)$$

$$W'(t) = \det\begin{bmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(n-2)} & -a_1(t) f_1^{(n-1)} \\ f_2 & f_2' & \cdots & f_2^{(n-2)} & -a_1(t) f_1^{(n-1)} \end{bmatrix} = -a_1(t) W(t)$$

$$e^{\int A(s)ds} = e^{At}$$

adj

$x'(t) = y(t) + t$
$y'(t) = -x(t) - y(t) + t^2$
$x(0) = 1$
$y(0) = 1$

$x'(t) = y(t)$
$y'(t) = -x(t) - y(t)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1) + 1 = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}/2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = -\frac{1}{2}a + i\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ -a - b = \frac{1}{2}b + i\frac{\sqrt{3}}{2}b \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \end{pmatrix} \Rightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

$$e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} + i e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

Θέλουμε ένα $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad X' = AX$

Άρα
$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$A=(a_{ij}) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j} C_{ij}\right)^T$

$\det X(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t}$

$X^{-1}(t) =$

$X^{-1}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' - X^{-1}(t) A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X^{-1}(t) g(t) \quad , \; g(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}\left(X^{-1}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right) = X^{-1}(t) g(t)$