Τρίτη 29 Οκτωβρίου 2013

Α. Τερτίκας

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(Φυλλάδιο 3)

1. Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= t\sqrt{y(t)} + t^2, \quad t > 0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει τοπικά λύση, δηλ. βρείτε ένα διάστημα στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.
β) Εξετάστε τη μονοτονία της λύσης στο διάστημα ύπαρξης της.
γ) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων.

2. Έστω $\delta > 0$, $L \in \mathbf{R}$ και $\sigma : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ που επιπρόσθετα ικανοποιεί την συνθήκη

$$\sigma'(t) \leq \delta^2 + L\sigma(t), \quad t > 0.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\sigma(t) \leq (\frac{\delta^2}{L} + \sigma(0))e^{Lt} - \frac{\delta^2}{L}, \quad t > 0.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(t) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } 0 \leq t \leq 1, \\ -1 & , \text{αν } t > 1. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(t) = \int_0^t (1 - g(s)\phi(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

έχει λύση, ενώ το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = 1 - g(t)y(t), \quad t > 0,$$
$$y(0) = 0,$$

δεν έχει λύση.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ